PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 1 – 2014

MARIA WESTA

ALGEBRAICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ PEWNYCH ESTYMATORÓW MNK ORAZ PREDYKTORÓW W PRZYPADKU KLASYCZNYCH MODELI REGRESJI LINIOWEJ UWZGLĘDNIAJĄCYCH ADDYTYWNE, STAŁE EFEKTY SEZONOWE

1. WSTĘP

Klasyczny model regresji liniowej, do którego włączono addytywne, stałe efekty sezonowe dotyczące wszystkich okresów sezonowych (poniżej nazywany KMRL-AS), nie może być szacowany bezpośrednio metodą najmniejszych kwadratów (MNK) z powodu dokładnej współliniowości zmiennych objaśniających. Niniejszy artykuł dotyczy estymatorów i predyktorów stosowanych w przypadku KMRL-AS, w których wykorzystuje się to, że parametry KMRL-AS są liniowymi funkcjami parametrów pewnych modeli estymowalnych bezpośrednio MNK (poniżej nazywanych modelami pomocniczymi lub krócej MP), uzyskanych z KMRL-AS przez eliminację jednej ze współliniowych zmiennych objaśniających lub jednego z efektów sezonowych. Rozważania artykułu dotyczą pośrednio estymatorów i predyktorów dla klasycznego modelu deterministycznego trendu liniowego z addytywnymi, stałymi efektami sezonowymi. Model ten bowiem z formalnego punktu widzenia jest szczególnym przypadkiem KMRL-AS.

W literaturze światowej brak jest precyzyjnych teoretycznych informacji o relacjach między wynikami uzyskiwanymi przy użyciu różnych estymatorów (różnych predyktorów), dotyczących KMRL-AS lub wspomnianego powyżej szczególnego przypadku KMRL-AS. Znajduje to odzwierciedlenie w podręcznikach akademickich (patrz np. Cieślak, 2005 s. 89; Gruszczyński et. al. 2009 s. 113–114; Maddala, 2006, s. 353 i 391; Welfe, 2003, s. 167–168; Zieliński, 1979). W literaturze przedmiotu brak jest również precyzyjnych informacji teoretycznych o relacjach między estymatorami efektów sezonowych (o relacjach między predyktorami) opartymi na KMRL-AS i na klasycznym modelu regresji liniowej zawierającym składowe harmoniczne (poniżej nazywanym KMRL-HS). Na podstawie przykładów liczbowych stwierdza się, że modele te „można stosować zamiennie, gdyż dają one przybliżone wyniki” (patrz np. Wiśniewski, 1981 s. 69–70).

Wykorzystując twierdzenia udowodnione przez Westę (2004), w niniejszym artykule określono zależności między estymatorami MNK parametrów strukturalnych

dla par modeli należących do zbioru utworzonego przez KMRL-HS i wszystkie MP. Następnie udowodniono:
– algebraiczną równoważność estymatorów parametrów strukturalnych KMRL-AS w przypadku wszystkich procedur wykorzystujących MP;
– identyczność reszt KMRL-AS, KMRL-HS i wszystkich MP;
– algebraiczną równoważność estymatorów dowolnego efektu sezonowego, wykorzystujących MP albo KMRL-HS;
– algebraiczną równoważność predyktorów zmiennej objaśnianej KMRL-HS i KMRL-AS, opartych odpowiednio na KMRL-HS i dowolnych MP.

Dalsza struktura artykułu jest następująca. Po sformułowaniu założeń KMRL-AS (pkt 2), przedstawieniu rozważanych procedur estymacji tego modelu (pkt 3) i określeniu założeń KMRL-HS (pkt 4), udowodniono twierdzenie dotyczące relacji między wynikami estymacji MNK par modeli należących do zbioru obejmującego KMRL-HS i wszystkie MP (pkt 5). W twierdzeniu określono zależności zarówno między estymatorami wektorów parametrów strukturalnych, jak i estymatorami macierzy wariancji i kowariancji tych estymatorów. Wykazano także identyczność reszt MNK tych modeli. Powyższe twierdzenie wykorzystano w dowodach dwóch twierdzeń dotyczących estymacji KMRL-AS (pkt 6). Zgodnie z pierwszym twierdzeniem estymatory wektora parametrów strukturalnych KMRL-AS w wszystkich procedurach wykorzystujących MP są algebraicznie równoważne. Według drugiego twierdzenia reszty KMRL-AS są identyczne z resztami MP. Następnie udowodniono algebraiczną równoważność estymatorów efektów sezonowych w przypadku KMRL-AS i KMRL-HS (pkt 7). Ostatni punkt artykułu dotyczy predyktorów wartości zmiennej objaśnianej w KMRL-AS i KMRL-HS. Wykazano, że predyktory oparte na KMRL-HS i MP są sobie równe i algebraicznie równoważne zaproponowanemu w artykule predyktorowi opartemu na KMRL-AS.

2. ZAŁOŻENIA ROZWAŻANEGO MODELU REGRESJI LINIOWEJ Z ADDYTYWNYMI, STAŁYMI EFEKTAMI SEZONOWYMI

Oznaczmy przez y_t, x_{1t}, x_{2t}, …, x_{kt} ($t = 1, 2, \ldots, n$) t-te obserwacje odpowiednio na zmiennych y, x_1, x_2, …, x_k. Przyjmijmy, że występuje m-okresowa sezonowość, gdzie m jest liczbą parzystą. Niech Q_{it} ($i \in \{1, 2, \ldots, m\}$; $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$) jest zdefiniowane następująco:

$$Q_{it} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } t \text{ dotyczy } i\text{-tego okresu sezonowego} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \tag{1}$$

Załóżmy, że kształtowanie się y_t opisuje następujący model:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i Q_{it} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{jt} + u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n;\ n > m + k), \tag{2}$$

gdzie: β_0, γ_1, …, γ_m, β_1, β_2, …, β_k – nieznane parametry strukturalne, spełniające warunek:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m = 0 . \tag{3}$$

u_1, u_2, …, u_n – składniki losowe takie, że:

$$E(u_t) = 0 , \; Var(u_t) = \sigma^2 \text{ i } E(u_t u_{t'}) = 0 , \quad (t = 1,\ 2,\ \ldots, n;\ t' = 1,\ 2,\ \ldots, n \quad \text{i} \quad t' \neq t), \tag{4}$$

przy czym $\sigma^2 > 0$ jest nieznaną stałą.

Niech ponadto macierz obserwacji na zmiennych x_1, x_2, …, x_k w modelu (2), oznaczana poniżej **X**, spełnia następujące założenia:

– elementy macierzy **X** ustalone są w powtarzalnych próbach; (5)

– rząd macierzy **X** jest równy k. (6)

Poniżej model określony w (2)-(6) nazywany będzie skrótowo KMRL-AS. Powstał on przez włączenie do klasycznego modelu regresji liniowej addytywnych, stałych efektów sezonowych dotyczących wszystkich okresów sezonowych. Z formalnego punktu widzenia, szczególnym przypadkiem KMRL-AS jest m.in. następujący model deterministycznego trendu liniowego z addytywnymi, stałymi efektami sezonowymi:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i Q_{it} + \beta_1\, t + u_t \qquad (t = 1,\ 2,\ \ldots, n;\ n > m + 1) . \tag{7}$$

Parametr γ_i w modelu (2) nazywany będzie poniżej efektem sezonowym i-tego okresu sezonowego. Określa on ile przeciętnie w i-tych okresach sezonowych y_t odchyla się od warunkowej wartości oczekiwanej y_t względem x_{1t}, x_{2t}, …, x_{kt}. W przypadku modelu (7) parametr γ_i interpretowany jest jako przeciętne odchylenie w i-tych okresach sezonowych y_t od linii trendu określonej przez parametry β_0 i β_1.

3. PROCEDURY ESTYMACJI PARAMETRÓW KMRL-AS

Nie można oszacować parametrów KMRL-AS stosując MNK bezpośrednio do tego modelu. Z (1) wynika, że:

$$Q_{1t} + Q_{2t} + \cdots + Q_{mt} = 1, \tag{8}$$

Powoduje to, że pierwsza kolumna macierzy obserwacji na zmiennych objaśniających w KMRL-AS jest równa sumie m następnych kolumn, co oznacza dokładną współliniowość zmiennych objaśniających.

Poniżej rozpatrzymy $2m + 1$ procedur estymacji modelu KMRL-AS, w tym:

– m procedur I typu, o numerach 1, 2, ..., m;

– m procedur II typu, o numerach $m + 1$, $m + 2$, …, $2m$;

– jedną procedurę III typu o numerze $2m + 1$.

W powyższych procedurach najpierw szacuje się MNK parametry MP. Potem wykorzystuje się odpowiednie wzory wynikające z teorii estymacji funkcji parametrów klasycznych modeli regresji liniowej.

Niech $\mathbf{X}^{(r)}$ będzie macierzą obserwacji na zmiennych objaśniających MP w r-tej procedurze. Macierz ta ma wymiary $(m + k) \times n$. Pierwszych m kolumn dotyczy zmiennych powstałych przez eliminację z (2) jednej ze współliniowych zmiennych objaśniających lub jednego z efektów sezonowych. Pozostałe k kolumny w $\mathbf{X}^{(r)}$ zawierają kolejno obserwacje na zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$, o których mowa w modelu (2). W dalszych rozważaniach przyjmiemy dodatkowo następujące założenie:

> $x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{kt}$ ($t = 1, 2, \ldots, n$) są takie, że macierz $\mathbf{X}^{(r)}$ obserwacji na zmiennych objaśniających MP w r-tej procedurze, gdzie $r \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$, ma rząd równy $m + k$.

Oznaczmy przez $\boldsymbol{\delta}$ i $\boldsymbol{\pi}^{(r)}$ wektory parametrów strukturalnych odpowiednio KMRL-AS i MP w r-tej procedurze. Niech $\mathbf{C}^{(r)}$ będzie macierzą taką, że $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{C}^{(r)}\boldsymbol{\pi}^{(r)}$. Przyjmijmy, że symbole $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)}$ i $\hat{\sigma}_r^2$ oznaczają dla r-tej procedury odpowiednio estymator MNK wektora $\boldsymbol{\pi}^{(r)}$ i wariancję resztową MP. Estymator wektora $\boldsymbol{\delta}$, uzyskany przy użyciu r-tej procedury, oznaczany poniżej $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)}$, oraz estymator macierzy wariancji i kowariancji $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)}$ są równe odpowiednio:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)} = \mathbf{C}^{(r)}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)}, \qquad Var\left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)}\right) = \hat{\sigma}_r^2\mathbf{C}^{(r)}\left(\mathbf{X}^{(r)T}\mathbf{X}^{(r)}\right)^{-1}\mathbf{C}^{(r)}.$$

Niech $\tilde{\beta}_0^{(r)}, \tilde{\gamma}_1^{(r)}, \tilde{\gamma}_2^{(r)}, \ldots, \tilde{\gamma}_m^{(r)}, \tilde{\beta}_1^{(r)}, \tilde{\beta}_2^{(r)}, \ldots, \tilde{\beta}_k^{(r)}$, gdzie $r \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$, są estymatorami odpowiednio parametrów $\beta_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_k$ w KMRL-AS, uzyskanymi przy użyciu r-tej procedury. Oznaczmy przez I_r zbiór zdefiniowany następująco:

$$I_r = \{1, 2, \ldots, \mathrm{m}\} - \{r\} \quad \text{gdy} \quad r \in \{1, 2, ..., m\};$$
$$I_r = \{1, 2, \ldots, \mathrm{m}\} - \{r - m\} \quad \text{gdy} \quad r \in \{m + 1, m + 2, ..., 2m\}.$$

Procedury I typu

MP stosowane w procedurach I typu powstają w wyniku wyeliminowania z KMRL-AS jednego z parametrów efektów sezonowych przy użyciu (3). W r-tej procedurze I typu, gdzie $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$, wykorzystuje się następujący MP:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i \in I_r}\gamma_i SR_{it}^{(r)} + \sum_{j=1}^{k}\beta_j\, x_{jt} + u_t \qquad (t = 1,\ 2,\ \ldots, n), \tag{9}$$

gdzie:

$$SR_{it}^{(r)} = Q_{it} - Q_{rt} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } t \text{ dotyczy } i\text{-tego okresu sezonowego } (i \in I_r), \\ -1 & \text{gdy } t \text{ dotyczy } r\text{-tego okresu sezonowego}, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \quad (10)$$

Model (9) można otrzymać z KMRL-AS podstawiając za γ_r w (2) wyrażenie $-\sum_{i\in I_r}\gamma_i$, uzyskane z (3). Jako estymatory parametrów strukturalnych KMRL-AS w r-tej procedurze I typu przyjmuje się:

$$\tilde{\beta}_0^{(r)} = \hat{\beta}_0^{(r)}, \quad \tilde{\gamma}_i^{(r)} = \hat{\gamma}_i^{(r)} \ \left(i \in I_r\right), \quad \tilde{\beta}_j^{(r)} = \hat{\beta}_j^{(r)} \ \left(j = 1, 2, ..., k\right), \quad \tilde{\gamma}_r^{(r)} = -\sum_{i\in I_r} \hat{\gamma}_i^{(r)}. \quad (11)$$

gdzie $\hat{\beta}_0^{(r)}$, $\hat{\gamma}_i^{(r)}$ $(i \in I_r)$, $\hat{\beta}_j^{(r)}$ $(j = 1, 2, \dots, k)$ oznaczają estymatory MNK parametrów β_0, γ_i $(i \in I_r)$, β_j $(j = 1, 2, \dots, k)$ modelu (9).

Procedury II typu

MP wykorzystywane w procedurach II typu otrzymuje się przez wyeliminowanie z KMRL-AS jednej ze zmiennych zero-jedynkowych zdefiniowanych w (1). Postać MP wykorzystywanego w procedurze II typu o numerze r-tym, gdzie $r \in \{m + 1, m + 2, \dots, 2m\}$, jest następująca:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i\in I_r} \alpha_i Q_{it} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{jt} + u_t \qquad \left(t = 1, 2, \dots, n\right), \quad (12)$$

przy czym $\alpha_0 = \beta_0 + \gamma_r$, $\alpha_i = \gamma_i - \gamma_r$ $(i \in I_r)$.

Model (12) można uzyskać z KMRL-AS przez zastąpienie Q_{rt} w (2) przez wyrażenie $1 - \sum_{i\in I_r} Q_{it}$, otrzymane z (8). Przyjmijmy, że $\hat{\alpha}_0^{(r)}$, $\hat{\alpha}_i^{(r)}$ $(i \in I_r)$, $\hat{\beta}_j^{(r)}$ $(j = 1, 2, \dots, k)$ oznaczają estymatory MNK odpowiednio parametrów α_0, α_i $(i \in I_r)$ i β_j $(j = 1, 2, \dots, k)$ modelu (12). Estymatory parametrów strukturalnych KMRL-AS w r-tej procedurze II typu można przedstawić wówczas następująco:

$$\begin{gathered} \tilde{\beta}_0^{(r)} = \hat{\alpha}_0 + m^{-1} \sum_{i\in I_r} \hat{\alpha}_i^{(r)}, \quad \tilde{\gamma}_r^{(r)} = -m^{-1} \sum_{i\in I_r} \hat{\alpha}_i^{(r)}, \quad \tilde{\gamma}_i^{(r)} = \hat{\alpha}_i - m^{-1} \sum_{i\in I_r} \hat{\alpha}_i^{(r)} \ \left(i \in I_r\right), \\ \tilde{\beta}_j^{(r)} = \hat{\beta}_j^{(r)} \ \left(j = 1, 2, ..., k\right). \end{gathered} \quad (13)$$

Wyrażenie $\sum_{i\in I_r}\alpha_i Q_{it}$ w (12) bywa zastępowane przez wyrażenie $\sum_{i\in I_r}\alpha_i SC_{it}$, gdzie SC_{it} są wartościami tzw. scentrowanych zmiennych sezonowych, zdefiniowanymi następująco: $SC_{it} = Q_{it} - m^{-1}$ $(i \in I_r)$. Transformacja ta nie zmienia wartości odchyleń zmiennych objaśniających w modelu (12) od ich wartości średnich, co na mocy teorii estymacji klasycznych modeli regresji liniowej (patrz np. Goldberger, 1972 s. 239–241) oznacza, że zamiana Q_{it} na SC_{it} w (12) nie ma żadnego wpływu na wartości estymatorów MNK parametrów α_i $(i \in I_r)$ i β_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ modelu (12), a tym samym również wartości estymatorów $\tilde{\gamma}_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ i $\tilde{\beta}_j^{(r)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, określonych w (13). Powyższa transformacja powoduje jedynie zmniejszenie oceny wyrazu wolnego w (12) o wartość $m^{-1}\sum_{i\in I_r}\hat{\alpha}_i^{(r)}$, w wyniku czego oceny wyrazów wolnych w modelach (12) i (2) są sobie równe.

Procedura III typu

W procedurze III typu (o numerze $r = 2m + 1$) wykorzystywany jest następujący MP:

$$y_t = \sum_{i=1}^{m}\mu_i Q_{it} + \sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{jt} + u_t \qquad (t = 1,\ 2,\ \ldots, n), \tag{14}$$

gdzie $\mu_i = \beta_0 + \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Model (14) można otrzymać z KMRL-AS zastępując zmienną przy β_0 w (2), która jest tożsamościowo równa jedności, przez wyrażenie stojące po lewej stronie (8). Oznaczmy przez $\hat{\mu}_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\hat{\beta}_j^{(r)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ estymatory MNK odpowiednio parametrów μ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, β_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ modelu (14). Estymatory parametrów strukturalnych KMRL-AS w procedurze III typu są zdefiniowane następująco:

$$\tilde{\beta}_0^{(r)} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\hat{\mu}_i^{(r)},\ \ \tilde{\gamma}_i^{(r)} = \hat{\mu}_i^{(r)} - m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\hat{\mu}_i^{(r)}\ (i = 1, 2,\ \ldots, m),\ \tilde{\beta}_j^{(r)} = \hat{\beta}_j^{(r)}\ \ (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{15}$$

4. ZAŁOŻENIA ROZWAŻANEGO KLASYCZNEGO MODELU REGRESJI LINIOWEJ ZAWIERAJĄCEGO SKŁADOWE HARMONICZNE

Niech $m^* = m/2$ i $\omega_i = 2\pi i/m$. Przyjmijmy, że kształtowanie się y_t opisuje następujący klasyczny model regresji liniowej ze składowymi harmonicznymi (nazywany poniżej skrótowo KMRL-HS):

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m^*}\alpha_{1i}\cos\omega_i t + \sum_{i=1}^{m^*-1}\alpha_{2i}\sin\omega_i t + \sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{jt} + u_t \qquad (t = 1,\ 2,\ \ldots, n;\ n > m + k), \tag{16}$$

gdzie: $\beta_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m^*}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{1m^*-1}, \beta_1, \ldots, \beta_k$ – nieznane parametry strukturalne, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – składniki losowe spełniające założenia (4).

Przyjmijmy, że $\hat{\beta}_0^{(h)}, \hat{\alpha}_{11}^{(h)}, \ldots, \hat{\alpha}_{1m^*}^{(h)}, \hat{\alpha}_{21}^{(h)}, \ldots, \hat{\alpha}_{2(m^*-1)}^{(h)}, \hat{\beta}_1^{(h)}, \ldots, \hat{\beta}_k^{(h)}$ oznaczają estymatory MNK odpowiednio parametrów $\beta_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m^*}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{1m^*-1}, \beta_1, \ldots, \beta_k$ modelu (16). Jako estymatory efektów sezonowych dla kolejnych okresów sezonowych przyjmuje się:

$$\hat{\gamma}_j^{(h)} = \sum_{i=1}^{m^*} \hat{\alpha}_{1i}^{(h)} \cos \omega_i t_j^* + \sum_{i=1}^{m^*-1} \hat{\alpha}_{2i}^{(h)} \sin \omega_i t_j^* \quad \left(j = 1, 2, ..., m\right). \tag{17}$$

gdzie t_j^* jest minimalną wartością zmiennej t dla j-tych okresów sezonowych. W szczególnym przypadku, gdy y_1 dotyczy pierwszego okresu sezonowego, otrzymujemy $t_j^* = j$.

5. ZALEŻNOŚCI MIĘDZY ESTYMATORAMI MNK PARAMETRÓW MODELI NALEŻĄCYCH DO ZBIORU UTWORZONEGO PRZEZ WSZYSTKIE MP ORAZ KMRL-HS

Przypiszmy numery $1, 2, \ldots, 2m + 1$ odpowiednio modelom MP wykorzystywanym w przedstawionych powyżej procedurach $1, 2, \ldots, 2m + 1$ estymacji parametrów KMRL-AS. Niech ponadto KMRL-HS ma numer h-ty, gdzie $h \notin \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$. Przyjmijmy, że

$$M = \{1, 2, \ldots, 2m + 1, h\}. \tag{18}$$

Poniżej wykażemy, że na podstawie ocen MNK parametrów r-tego modelu, $r \in M$, można w prosty sposób znaleźć oceny MNK parametrów dowolnego s-tego modelu, $s \neq r$ i $s \in M$.

Podzielmy macierz obserwacji na zmiennych objaśniających w r-tym modelu, $r \in M$, na bloki w sposób następujący: $\mathbf{X}^{(r)} = \left[\mathbf{X}_1^{(r)} \;\vdots\; \mathbf{X}\right]$, gdzie $\mathbf{X}_1^{(r)}$ i $\mathbf{X}$ są macierzami obejmującymi odpowiednio m pierwszych i k ostatnich kolumn macierzy $\mathbf{X}^{(r)}$. Niech $\mathbf{Z}^{(r)}$ oznacza macierz o wymiarach $m \times m$, utworzona z m pierwszych wierszy macierzy $\mathbf{X}^{(r)}$. Z definicji m pierwszych zmiennych objaśniających w modelach pomocniczych (9), (12), (12) i (16) wynika, że:

– rząd macierzy $\mathbf{Z}^{(r)}$ dla $r \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$ jest równy m;
– wiersze o numerach $i, i + m, i + 2m, \ldots$ w macierzy $\mathbf{X}_1^{(r)}$ są sobie równe.

Wykorzystując powyższe stwierdzamy, że dla każdej pary r i s takiej, że $r \neq s$ i $r, s \in M$, istnieje nieosobliwa macierz o wymiarach $m \times m$, oznaczana poniżej $\mathbf{A}_{r,s}$, dla której zachodzi następująca zależność:

$$\mathbf{X}_1^{(s)} = \mathbf{X}_1^{(r)} \mathbf{A}_{r,s}, \text{ przy czym } \mathbf{A}_{r,s} = \left(\mathbf{Z}^{(r)}\right)^{-1} \mathbf{Z}^{(s)}. \tag{19}$$

Z (19) wynika, że:

$$\mathbf{A}_{r,s}^{-1} = \mathbf{A}_{s,r}. \tag{20}$$

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. Przyjmijmy, że $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)}$, gdzie $r \in M$, jest estymatorem MNK wektora parametrów strukturalnych r-tego modelu. Podzielmy wektor $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)}$ na bloki w sposób następujący: $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)} = \left[\left(\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}\right)^T \vdots \left(\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)}\right)^T\right]^T$, gdzie wektory $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}$, $\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)}$ mają odpowiednio wymiary $m \times 1$ i $k \times 1$. Niech $\hat{u}_t^{(r)}$ i $\hat{\sigma}_r^2$ oznaczają odpowiednio t-tą resztę i wariancję resztową r-tego modelu. Przyjmijmy, że $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{1r}$ jest nieobciążonym estymatorem macierzy wariancji i kowariancji $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}$, zdefiniowanym następująco: $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{1r} = \hat{\sigma}_r^2 \left(\mathbf{X}_1^{(r)T}\mathbf{X}_1^{(r)}\right)^{-1}$. Niech ponadto $\mathbf{A}_{s,r}$ jest macierzą określoną w (19)-(20). Wówczas dla każdych r i s, takich, że $r \neq s$ i $r, s \in M$, mamy:

a) $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(s)} = \mathbf{A}_{s,r}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}$; (21)

b) $\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(s)} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)}$; (22)

c) $\hat{u}_t^{(r)} = \hat{u}_t^{(s)} \quad (t = 1,\ 2,\ \ldots, n)$; (23)

d) $\hat{\sigma}_r^2 = \hat{\sigma}_s^2$; (24)

e) $\hat{\Sigma}_{1s} = \mathbf{A}_{s,r}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{1r}\mathbf{A}_{s,r}^T$. (25)

Dowód: Macierz $\mathbf{X}^{(s)}$ obserwacji na zmiennych objaśniających w r-tym modelu można uzyskać mnożąc prawostronnie m pierwszych kolumn macierzy $\mathbf{X}^{(r)}$ przez macierz $\mathbf{A}_{r,s}$, określoną w (19). Wykorzystując twierdzenie dotyczące konsekwencji przekształcenia polegającego na prawostronnym pomnożeniu części kolumn macierzy obserwacji na zmiennych objaśniających przez macierz nieosobliwą o znanych elementach (patrz Westa, 2004, s. 167–168), stwierdzamy prawdziwość (21)-(25). To kończy dowód. ■

Z twierdzenia 1 wynika, że w przypadku KMRL-HS i wszystkich MP estymatory MNK wektora parametrów strukturalnych przy ostatnich k zmiennych objaśniających są algebraicznie równoważne. Zgodnie z (21), (25) i (19)-(20), dla określenia zależności między estymatorami MNK wektora m pierwszych parametrów strukturalnych (między estymatorami macierzy wariancji i kowariancji estymatora MNK wektora m pierwszych parametrów strukturalnych) w modelu r-tym i s-tym, gdzie $r \neq s$ i $r, s \in M$, wystarcza znajomość macierzy $\mathbf{A}_{s,r} = \left(\mathbf{Z}^{(s)}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{(r)}$, przy czym $\mathbf{Z}^{(s)}$ i $\mathbf{Z}^{(r)}$ są macierzami utworzonymi z m pierwszych wierszy odpowiednio macierzy $\mathbf{X}^{(s)}$ i $\mathbf{X}^{(r)}$.

Macierz $\mathbf{A}_{s,r}$, wykorzystywana w twierdzeniu 1, ma prostą strukturę dla wszystkich MP. Poniżej podamy przykłady postaci tej macierzy. Niech $\mathbf{W}$ oznacza następującą macierz o wymiarach $(m + 1) \times (m + 1)$:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & m^{-1} & \cdots & m^{-1} & m^{-1} \\ 0 & 1-m^{-1} & \cdots & -m^{-1} & -m^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -m^{-1} & \cdots & 1-m^{-1} & -m^{-1} \\ 0 & -m^{-1} & \cdots & -m^{-1} & 1-m^{-1} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Oznaczmy przez $\mathbf{W}_{s,r}$ (przez $\mathbf{I}_{s,r}$) macierz powstałą przez usunięcie s-tego wiersza i r-tej kolumny z macierzy $\mathbf{W}$ (z macierzy jednostkowej stopnia $(m + 1)$-tego). Przyjmijmy, że $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ są m-elementowymi następującymi wektorami:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \ \text{ i } \ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}^T. \tag{27}$$

Wówczas:

- w przypadku MP wykorzystywanych w procedurach pierwszego typu, czyli gdy $r, s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, macierz $\mathbf{A}_{s,r}$ jest równa macierzy powstałej przez zastąpienie $(r + 1)$-tego wiersza w macierzy $\mathbf{I}_{s+1,r+1}$ przez wektor $\mathbf{p}$; (28)
- w przypadku MP wykorzystywanych w procedurach drugiego typu, czyli gdy $r, s \in \{m + 1, m + 2, \ldots, 2m\}$, macierz $\mathbf{A}_{s,r}$ jest równa macierzy powstałej przez zastąpienie $(r + 1)$-tej kolumny w macierzy $\mathbf{I}_{s-m+1,r-m+1}$ przez wektor $\mathbf{p}^T$; (29)
- gdy $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i $r \in \{m + 1, m + 2, \ldots, 2m\}$, to $\mathbf{A}_{s,r} = \mathbf{W}_{s+1,r-m+1}$; (30)
- gdy $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i $r = 2m + 1$, to $\mathbf{A}_{s,r} = \mathbf{W}_{s+1,1}$; (31)
- gdy $s \in \{m + 1, m + 2, \ldots, 2m\}$ i $r = 2m + 1$, to macierz $\mathbf{A}_{s,r}$ jest równa macierzy powstałej przez zastąpienie $(s - m)$-tej kolumny w macierzy $\mathbf{I}_{s-m+1,1}$ przez wektor $\mathbf{q}$. (32)

6. ALGEBRAICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ ESTYMATORÓW PARAMETRÓW KMRL-AS W PROCEDURACH TYPU I-III

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Oznaczmy przez $\boldsymbol{\delta}$ wektor parametrów strukturalnych KMRL-AS. Przyjmijmy $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)}$, że jest estymatorem wektora $\boldsymbol{\delta}$ w r-tej procedurze. Wówczas dla każdej pary r i s takiej, że $r \neq s$ i $r, s \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$, zachodzi:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(s)}. \tag{33}$$

Dowód: Podzielmy wektor $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)}$ na bloki w sposób następujący: $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)} = \left[\left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)}\right)^T \vdots \left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(r)}\right)^T \right]^T$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)} = \left[\tilde{\beta}_0^{(r)} \quad \tilde{\gamma}_1^{(r)} \quad \tilde{\gamma}_2^{(r)} \quad \cdots \quad \tilde{\gamma}_m^{(r)}\right]^T$ i $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(r)} = \left[\tilde{\beta}_1^{(r)} \quad \tilde{\beta}_2^{(r)} \quad \cdots \quad \tilde{\beta}_k^{(r)}\right]^T$. Przyjmujmy, że $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}$, $\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)}$ są estymatorami MNK parametrów strukturalnych MP w r-tej procedurze, określonymi w twierdzeniu 1. Oznaczmy przez $\mathbf{C}_1^{(r)}$ macierz powstałą z macierzy jednostkowej stopnia (m + 1)-tego przez usunięcie (r + 1)-tej kolumny i zastąpienie(r + 1)-tego wiersza przez wektor **p**, zdefiniowany w (27). Niech $\mathbf{C}_2^{(r)}$ (niech $\mathbf{C}_3$) jest macierzą powstałą z macierzy **W**, określonej w (26), przez usuniecie (r – m + 1)-tej kolumny (przez usunięcie pierwszej kolumny). Wówczas zależności (11), (13) i (15) można przedstawić odpowiednio w następującej postaci macierzowej:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)} = \mathbf{C}_1^{(r)}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)} \quad \text{i} \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(r)} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)} \quad \text{dla} \quad r \in \{1, 2, ..., m\}, \tag{34}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)} = \mathbf{C}_2^{(r)}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)} \quad \text{i} \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(r)} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)} \quad \text{dla} \quad r \in \{m+1, m+2, ..., 2m\}, \tag{35}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(2m+1)} = \mathbf{C}_3\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)} \quad \text{i} \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(2m+1)} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(2m+1)}. \tag{36}$$

Po uwzględnieniu (31) i (32) nietrudno wykazać, że:

$$\mathbf{C}_1^{(r)}\mathbf{A}_{r,2m+1} = \mathbf{C}_3 \quad \text{dla} \quad r \in \{1, 2, ..., m\}, \tag{37}$$

$$\mathbf{C}_2^{(r)}\mathbf{A}_{r,2m+1} = \mathbf{C}_3 \quad \text{dla} \quad r \in \{m+1, m+2, ..., 2m\}. \tag{38}$$

Po podstawieniu w (34) i (35) za $\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)}$ odpowiedniego wyrażenia z (21) oraz uwzględnieniu (22), (37) i (38) otrzymujemy:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(r)} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(s)} \quad \text{dla} \quad r \neq s \quad \text{i} \quad r, s \in \{1, 2, ..., 2m+1\}, \tag{39}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)} = \mathbf{C}_1^{(r)}\mathbf{A}_{r,2m+1}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)} = \mathbf{C}_3\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)}, \quad \text{dla} \quad r \in \{1, 2, ..., m\}, \tag{40}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(r)} = \mathbf{C}_2^{(r)}\mathbf{A}_{i,2m+1}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)} = \mathbf{C}_3\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)} \quad \text{dla} \quad r \in \{m+1, m+2, ..., 2m\}. \tag{41}$$

Z (39)-(41) wynika prawdziwość (33), co kończy dowód. ■

Zgodnie z twierdzeniem 2, estymatory wektora **δ** parametrów strukturalnych KMRL-AS, uzyskane przy użyciu procedur typu I, II lub III są algebraicznie równoważne. Poniżej symbol $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ oznaczać będzie estymator wektora **δ** parametrów strukturalnych KMRL-AS, uzyskany przy użyciu dowolnej z procedur typu I, II lub III, tzn.

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(r)} \quad \text{dla} \quad r \in \{1, 2, ..., 2m+1\}. \tag{42}$$

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. Przyjmijmy, że $\tilde{u}_t$ i $\tilde{\sigma}^2$ są odpowiednio t-tą resztą i wariancją resztową KMRL-AS, określonymi następująco:

$$\tilde{u}_t = y_i - \mathbf{x}_t \tilde{\boldsymbol{\delta}}, \qquad \tilde{\sigma}^2 = (n-m-k)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \left(y_i - \mathbf{x}_t \tilde{\boldsymbol{\delta}}\right)^2, \tag{43}$$

gdzie $\mathbf{x}_t$ oznacza t-ty wiersz macierzy obserwacji na zmiennych objaśniających w KMRL-AS.

Niech $\hat{u}_t^{(r)}$ i $\hat{\sigma}_r^2$ oznaczają odpowiednio t-tą resztę i wariancję resztową w MP wykorzystywanym w r-tej procedurze. Wówczas dla $r \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$ i $t = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi:

$$\tilde{u}_t = \hat{u}_t^{(r)} \quad \text{i} \quad \tilde{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_r^2. \tag{44}$$

Dowód: Na mocy twierdzenia 2 dla każdej pary r i s takiej, że $r \neq s$ i $r, s \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$ mamy $\hat{u}_t^{(r)} = \hat{u}_t^{(s)}$ ($t = 1, 2, \ldots, n$) i $\hat{\sigma}_r^2 = \hat{\sigma}_s^2$. Dla przeprowadzenia dowodu wystarczy więc wykazać, że $\tilde{u}_t$ i $\tilde{\sigma}^2$ są równe odpowiednio t-tej reszcie i wariancji resztowej MP w dowolnej z procedur, na przykład w procedurze m-tej. Niech $\mathbf{x}_t^{(m)}$ jest t-tym wierszem macierzy obserwacji na zmiennych objaśniających w MP w m-tej procedurze. Z definicji $\tilde{u}_t$ i $\hat{u}_t^{(r)}$ wynika, że zależność (44) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x}_t \tilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{x}_t^{(m)} \hat{\boldsymbol{\pi}}^{(m)}$, co ze względu na (42) jest równoważne

$$\mathbf{x}_t \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(m)} = \mathbf{x}_t^{(m)} \hat{\boldsymbol{\pi}}^{(m)}. \tag{45}$$

Dokonując podziału wektora $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{(m)}$ na bloki w sposób określony w dowodzie twierdzenia 2, można (45) zapisać równoważnie w postaci:

$$\mathbf{x}_{1t} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(m)} = \mathbf{x}_{1t}^{(m)} \hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(m)}, \qquad \mathbf{x}_{2t} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(m)} = \mathbf{x}_{2t}^{(m)} \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(m)}, \tag{46}$$

gdzie $\mathbf{x}_{1t} = \begin{bmatrix} 1 & Q_{1t} & Q_{2t} & \cdots & Q_{mt} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_{1t}^{(m)} = \begin{bmatrix} 1 & SR_{1t}^{(m)} & SR_{2t}^{(m)} & \cdots & SR_{(m-1)t}^{(m)} \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{x}_{2t}$ i $\mathbf{x}_{2t}^{(m)}$ są wektorami obejmującymi k ostatnich elementów odpowiednio wektorów $\mathbf{x}_t$ i $\mathbf{x}_t^{(m)}$.

Z (1), (9) oraz (34) wynika, że $\mathbf{x}_{2t} = \mathbf{x}_{2t}^{(m)}$ i $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_2^{(m)} = \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(m)}$, co oznacza prawdziwość drugiej równości w (46). Zastępując $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(m)}$ w (46) przez odpowiednie wyrażenie z (34), otrzymujemy: $\mathbf{x}_{1t} \mathbf{C}_1^{(m)} \hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(m)} = \mathbf{x}_{1t}^{(m)} \hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(m)}$. Wykorzystując następnie to, że $\mathbf{x}_{1t} \mathbf{C}_1^{(m)} = \mathbf{x}_{1t}^{(m)}$, stwierdzamy prawdziwość (46), a tym samym również prawdziwość (44). ■

Zgodnie z twierdzeniem 3 wariancja resztowa i reszty KMRL-AS, określone w (43), są identyczne odpowiednio z wariancją resztową i resztami MP w procedurach typu I, II i III. Można więc w procesie weryfikacji zastąpić reszty i wariancję resztową wykorzystywanego MP, określonego przez (9), (12) i (14), odpowiednio przez reszty i wariancja resztową KMRL-AS. Fakt ten jest istotny w przypadku estymacji KMRL-AS bez pośrednictwa MP (patrz Westa, 2013).

7. ALGEBRAICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ ESTYMATORÓW EFEKTÓW SEZONOWYCH W PRZYPADKU KMRL-AS I KMRL-HS

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4. Oznaczmy przez $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 & \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\gamma}_2 & \cdots & \tilde{\gamma}_m \end{bmatrix}^T$ wektor estymatorów pierwszych $m + 1$ parametrów strukturalnych KMRL-AS, uzyskany przy użyciu dowolnej z procedur typu I-III. Przyjmijmy, że $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0^{(h)} & \tilde{\gamma}_1^{(h)} & \tilde{\gamma}_2^{(h)} & \cdots & \tilde{\gamma}_m^{(h)} \end{bmatrix}^T$, przy czym $\hat{\beta}_0^{(h)}$ jest estymatorem MNK parametru β_0 modelu (16) i $\hat{\gamma}_i^{(h)}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) jest estymatorem (17) i-tego efektu sezonowego, uzyskanym przy użyciu KMRL-HS. Wówczas zachodzi:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1 = \tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)}. \tag{47}$$

Dowód: Podzielmy wektor $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)}$ na bloki odpowiednio w sposób następujący: $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0^{(h)} & \vdots & \left(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)}\right)^T \end{bmatrix}^T$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)} = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_1^{(h)} & \tilde{\gamma}_2^{(h)} & \cdots & \tilde{\gamma}_m^{(h)} \end{bmatrix}^T$. Niech obserwacja y_1 dotyczy v-tego okresu sezonowego. Przyjmijmy, że $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)*} = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_v^{(h)} & \tilde{\gamma}_{v+1}^{(h)} & \cdots & \tilde{\gamma}_m^{(h)} & \tilde{\gamma}_1^{(h)} & \cdots & \tilde{\gamma}_{v-1}^{(h)} \end{bmatrix}$. Nietrudno zauważyć, że $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)*} = \mathbf{Z}^{(2m+1)}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)}$. Stąd $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)} = \left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)*}$. Wykorzystując (17) stwierdzamy, że $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)*} = \left\{\mathbf{Z}^{(h)} - \begin{bmatrix}\mathbf{i} & \vdots & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right\}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(h)}$, gdzie $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$. Po uwzględnieniu powyższego oraz zależności (21) i (19)-(20), można przedstawić $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)}$ w postaci:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{(h)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0^{(h)} \\ \hline \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(h)} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_h \hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(2m+1)} \tag{48}$$

gdzie:

$$\mathbf{C}_h = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{-1}\left\{\mathbf{Z}^{(h)} - \begin{bmatrix}\mathbf{i} & \vdots & \mathbf{0}\end{bmatrix}\right\} \end{bmatrix} \left(\mathbf{Z}^{(h)}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{(2m+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}\,\mathbf{Z}^{(2m+1)} \\ \hline \mathbf{I} - \left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{g}^{\mathbf{T}} & \vdots & \cdots & \vdots & \mathbf{g}^{\mathbf{T}}\end{bmatrix}^T \mathbf{Z}^{(2m+1)} \end{bmatrix}, \tag{49}$$

przy czym $\mathbf{g}$ jest pierwszym wierszem macierzy $\left(\mathbf{Z}^{(h)}\right)^{-1}$.

Z definicji zmiennych objaśniających w modelu (16) wynika, że kolumny macierzy $\mathbf{Z}^{(h)}$ są ortogonalne. Macierz $\left(\mathbf{Z}^{(h)}\right)^{-1}$ można więc otrzymać dzieląc elementy każdej kolumny $\mathbf{Z}^{(h)}$ przez długość tej kolumny i następnie dokonując transpozycji macierzy. Pierwsza kolumna macierzy $\mathbf{Z}^{(h)}$ jest równa wektorowi $\mathbf{i}$. Stąd $\mathbf{g} = (1/m)\mathbf{i}$. Macierz $\mathbf{Z}^{(2m+1)}$ jest macierzą ortogonalną, co oznacza, że $\left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{-1} = \left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{T}$. Wykorzystując to, że kolumny $\mathbf{Z}^{(2m+1)}$ są pewną permutacją kolumn macierzy jednostkowej stopnia m-tego, otrzymujemy $\mathbf{g}\,\mathbf{Z}^{(2m+1)} = \mathbf{g}$ i $\left(\mathbf{Z}^{(2m+1)}\right)^{T}\mathbf{g}\,\mathbf{Z}^{(2m+1)} = \mathbf{g}$. Stąd (49) można zapisać w postaci: $\mathbf{C}^{(h)} = \mathbf{C}_3$, co ze względu na (48), (36) i (42) implikuje prawdziwość (47). To kończy dowód. ∎

8. ALGEBRAICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ PREDYKTORÓW WARTOŚCI ZMIENNEJ OBJAŚNIANEJ KMRL-AS I KMRL-HS

Niech T będzie okresem takim, że $T > n$. Przyjmijmy, że w tym okresie spełnione są założenia KMRL-AS i KMRL-HS tzn.

$$y_T = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i Q_{iT} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j\, x_{jT} + u_T\,, \tag{50}$$

$$y_T = \beta_0 \sum_{i=1}^{m^*} \alpha_{1i} \cos\omega_i T + \sum_{i=1}^{m^*-1} \alpha_{2i} \sin\omega_i T + \sum_{j=1}^{k} \beta_j\, x_{jT} + u_T \tag{51}$$

przy czym

$$E(u_T) = 0\,,\quad E\left(u_T^2\right) = \sigma^2 \text{ i } E(u_t u_T) = 0\,,\quad \text{dla każdego} \quad t \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{52}$$

Z (50) wynika, że w okresie T spełnione są również założenia modeli pomocniczych (9), (12), (14), tzn.

$$y_T = \beta_0 + \sum_{i \in I} \gamma_i SR_{iT}^{(r)} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j\, x_{jT} + u_T\,,\qquad r \in \{1, 2, ..., m\}, \tag{53}$$

$$y_T = \alpha_0 + \sum_{i \in I} \alpha_i Q_{iT} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j\, x_{jT} + u_T\,,\quad r \in \{m+1, m+2, ..., 2m\}, \tag{54}$$

$$y_T = \sum_{i=1}^{m} \mu_i Q_{iT} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j\, x_{jT} + u_T\,. \tag{55}$$

Przyjmijmy, że $\mathbf{x}_T$ i $\mathbf{x}_T^{(r)}$ są wektorami wartości zmiennych objaśniających w okresie T odpowiednio w KMRL-AS i r-tym modelu, gdzie $r \in M$, przy czym M określony w (18). Niech $\hat{y}_T^{(r)}$ oznacza najlepszy liniowy nieobciążony predyktor wartości zmiennej objaśnianej w r-tym modelu. Stosując teorię prognozowania na podstawie klasycznych jednorównaniowych modeli regresji (patrz np. Theil, 1979 s. 140-146), stwierdzamy, że gdy zachodzi (50)-(52), a tym samym (53), (54) i (55), to:

$$\hat{y}_T^{(r)} = \mathbf{x}_T^{(r)}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)} \quad \text{dla} \quad r \in M, \tag{56}$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)}$ jest estymatorem MNK wektora parametrów strukturalnych w r-tym modelu.

Przy obliczaniu prognoz wartości zmiennej objaśnianej w KMRL-AS wykorzystuje się predyktory (56) dla $r \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$. W niniejszym artykule proponuje się predyktor zdefiniowany następująco:

$$\tilde{y}_T = \mathbf{x}_T \tilde{\boldsymbol{\delta}}, \tag{57}$$

gdzie $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ jest określonym w (42) estymatorem wektora $\boldsymbol{\delta}$ parametrów strukturalnych KMRL-AS, uzyskanym w dowolnej z procedur typu I-III.

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5. Załóżmy, że w okresie T, gdzie $T > n$, spełnione są założenia (50)-(52). Niech $\tilde{y}_T$ i $\hat{y}_T^{(r)}$ dla $r \in M$ są predyktorami zdefiniowanymi odpowiednio w (57) i (56). Wówczas:

$$\hat{y}_T^{(1)} = \hat{y}_T^{(2)} = \cdots = \hat{y}_T^{(2m+1)} = \hat{y}_T^{(h)} = \tilde{y}_T. \tag{58}$$

Dowód: Podzielmy wektor $\mathbf{x}_T^{(r)}$ na bloki w sposób następujący: $\mathbf{x}_T^{(r)} = \left[\mathbf{x}_{1T}^{(r)} \vdots\ \mathbf{x}_{2T}^{(r)}\right]$, gdzie $\mathbf{x}_{1T}^{(r)}$ i $\mathbf{x}_{1T}^{(r)}$ obejmują odpowiednio m pierwszych i k ostatnich elementów wektora $\mathbf{x}_T^{(r)}$. Z (53)-(55) wynika, że:

$$\mathbf{x}_{1T}^{(s)} = \mathbf{x}_{1T}^{(r)}\mathbf{A}_{r,s} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_{2T}^{(s)} = \mathbf{x}_{2T}^{(r)} \quad \text{dla} \quad r \neq s \quad \text{i} \quad r, s \in M, \tag{59}$$

gdzie $\mathbf{A}_{r,s}$ jest nieosobliwą macierzą określoną w (19). Zgodnie z (56) dla dowolnego $s \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$ takiego, że $s \neq r$, mamy $\hat{y}_T^{(s)} = \mathbf{x}_T^{(s)}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(s)}$. Po podstawieniu za $\mathbf{x}_T^{(s)}$ i $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(s)}$ odpowiednich wyrażeń z (59) oraz (21) i wykorzystaniu następnie (20) otrzymujemy:

$$\hat{y}_T^{(s)} = \left[\mathbf{x}_{1T}^{(r)}\mathbf{A}_{r,s} \quad \mathbf{x}_{2T}^{(s)}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r,s}^{-1}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)} \\ \hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{1T}^{(r)}\mathbf{A}_{r,s}\mathbf{A}_{r,s}^{-1}\hat{\boldsymbol{\pi}}_1^{(r)} + \mathbf{x}_{2T}^{(s)}\hat{\boldsymbol{\pi}}_2^{(r)} = \mathbf{x}_T^{(r)}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(r)} = \hat{y}_T^{(r)}.$$

Oznacza to, że dla udowodnienia twierdzenia wystarczy wykazać, że prawa strona (57) jest równa prawej stronie (56) dla dowolnie wybranego r. Dla $r = m$ otrzymujemy:

$$\mathbf{x}_T \tilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{x}_T^{(m)} \hat{\boldsymbol{\pi}}^{(m)}. \tag{60}$$

Prawdziwość (60) wykazujemy analogicznie jak prawdziwość (45), zastępując w wywodach $\mathbf{x}_t$ i $\mathbf{x}_t^{(m)}$ odpowiednio przez $\mathbf{x}_T$ i $\mathbf{x}_T^{(m)}$. To kończy dowód. ■

Zgodnie z twierdzeniem 5, najlepsze liniowe nieobciążone predyktory zmiennej objaśnianej KMRL-AS i KMRL-HS, tj. predyktory o postaci podanej w (56), i predyktor zmiennej objaśnianej KMRL-AS, zaproponowany w (57), są algebraicznie równoważne.

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski

LITERATURA

Cieślak M., (red.), (2005), *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zadania*, PWN, Warszawa.
Godlberger A. S., (1972), *Teoria ekonometrii*, PWE, Warszawa.
Gruszczyński M., Kuszewski T., Podgórska M., (red.), (2009), *Ekonometria i badania operacyjne*, PWN, Warszawa.
Maddala G. S., (2006), *Ekonometria*, PWN, Warszawa.
Theil H., (1979), *Zasady ekonometrii*, PWN, Warszawa.
Welfe A., (2003), *Ekonometria*, PWE, Warszawa.
Westa M., (2004), Konsekwencje pewnego przekształcenia macierzy obserwacji na zmiennych objaśniających w liniowym i wykładniczym jednorównaniowym modelu ekonometrycznym, *Przegląd Statystyczny*, 2004 (3), 165–176.
Westa M., (2013), Uogólnienie uproszczonych wzorów K. Maciąg i C. Stepniaka dotyczących estymacji i prognozowania trendu i efektów sezonowych, maszynopis.
Wiśniewski J. W., (1981), *Ekonometria. Zagadnienia do ćwiczeń.* Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
Zieliński Z., (1979), *Metody analizy dynamiki i rytmiczności zjawisk gospodarczych*, PWN, Warszawa.

ALGEBRAICZNA RÓWNOWAŻNOŚĆ PEWNYCH ESTYMATORÓW MNK
ORAZ PREDYKTORÓW W PRZYPADKU KLASYCZNYCH MODELI REGRESJI LINIOWEJ
UWZGLĘDNIAJĄCYCH ADDYTYWNE, STAŁE EFEKTY SEZONOWE

S t r e s z c z e n i e

W artykule wykazano, że pewne estymatory MNK (pewne predyktory) stosowane w przypadku klasycznego modelu regresji liniowej, uwzględniającego addytywne stałe efekty sezonowe, są algebraicznie równoważne.

Słowa kluczowe: sezonowość deterministyczna, klasyczna regresja liniowa, prognozowanie

THE ALGEBRAIC EQUIVALENCY OF SOME OLS ESTIMATORS AND PREDICTORS IN THE CLASSICAL LINEAR REGRESSION MODEL WITH ADDITIVE CONSTANT SEASONAL EFFECTS

A b s t r a c t

In the paper, it was proved that some OLS estimators (some predictors) in the classical linear regression model with additive constant seasonal effects are algebraically equivalent.

Keywords: deterministic seasonality, classical linear regression, prediction