PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LX – ZESZYT 1 – 2013

PIOTR DUDZIŃSKI

WPŁYW AWERSJI DO RYZYKA NA WYBÓR PRAWNIKA – INTERPRETACJA ZA POMOCĄ RYZYKOWNOŚCI W SENSIE ROTHSCHILDA – STIGLITZA

1. WSTĘP

Osoby, które zagrożone są ryzykiem utraty majątku lub jego części mają do wyboru szereg możliwych działań prowadzących do zwiększenia bezpieczeństwa. Najpopularniejszym z nich jest oczywiście wykupienie polisy ubezpieczeniowej. Alternatywą dla ubezpieczenia są jednak indywidualne działania polegające na redukcji ewentualnych strat, nazywane samoubezpieczeniem, w skrócie SI[1], oraz działania mające na celu redukcję prawdopodobieństwa wystąpienia szkody, które nazywamy prewencją (SP[2]). Aby rozróżnić te pojęcia, rozważmy przykład zakupu i instalacji sejfu na kosztowności. W razie włamania utracone będą dobra pozostające poza sejfem, a zatem następuje redukcja strat, ale prawdopodobieństwo włamania w razie instalacji sejfu pozostaje takie samo. Jest to więc przykład samoubezpieczenia. Z kolei instalacja alarmu przeciwwłamaniowego powoduje, że do włamań dochodzi rzadziej, a zatem mamy do czynienia z redukcją prawdopodobieństwa wystąpienia szkody. Jeśli jednak system alarmowy zostanie sforsowany, to szkoda nie będzie zredukowana. Inwestycja w system alarmowy jest więc przykładem prewencji. Zakup gaśnicy jest przykładem samoubezpieczenia, zaś inwestycja w alarm przeciwpożarowy to przykład prewencji. Istnieje wiele przykładów samoubezpieczenia i prewencji w dziedzinie ochrony zdrowia. Regularne badania medyczne, zdrowe odżywianie, regularne ćwiczenia fizyczne, szczepionki, zażywanie witamin, itp. zwiększają ogólnie pojęte bezpieczeństwo zdrowotne. Na ogół redukują one prawdopodobieństwo zachorowania, ale w razie choroby, niektóre z tych działań redukują też dotkliwość jej skutków.

Pierwszymi autorami, którzy opisali i zaczęli w sposób systematyczny badać modele przedstawiające te zjawiska byli Becker i Ehrlich (1972). Zwrócili oni też uwagę na różnice między oboma pojęciami. Praca Ehrlicha i Beckera przyciągnęła uwagę wielu ekonomistów i od tamtego czasu powstała duża liczba prac teoretycznych przyczyniających się do zrozumienia natury tych zjawisk. Okazało się też, że różnice

---

[1] Skrót od „self-insurance".
[2] Skrót od „self-protection".

między oboma pojęciami są znaczące i dotyczą wielu aspektów ekonomicznych. Przykładowo, samoubezpieczenie jest zawsze substytutem rynkowego ubezpieczenia, zaś prewencja może być wobec niego komplementarna przy pewnych założeniach (Becker, Ehrlich, 1972; Courbage, 2001). Samoochrona i prewencja inaczej reagują także na zmiany awersji do ryzyka decydenta. Im bardziej jest on niechętny ryzyku, tym więcej inwestuje w samoochronę, ale poziom prewencji może podnieść się lub spaść, co wykazali Dionne i Eeckhoudt (1985). Briys i Schlesinger (1990) wyjaśnili ten paradoks dowodząc, że prewencja generalnie nie redukuje ryzykowności (w sensie Rothschilda-Stiglitza) związanej z bogactwem końcowym decydenta. Jullien, Salanie, Salanie (1999) udowodnili, że istnieje pewien krytyczny poziom prawdopodobieństwa poniesienia straty poniżej którego wzrost awersji do ryzyka powoduje wzrost inwestycji w prewencję, zaś powyżej tego progu efekt jest odwrotny.

Prace Chiu (2000, 2005), Eeckhoudta i Golliera (2005) oraz Dionne i Li (2010) dowodzą, że na optymalny poziom prewencji ma wpływ także poziom tzw. przezorności decydenta („prudence") mierzony indeksem analogicznym do indeksów awersji do ryzyka Arrowa-Pratta, w którym kluczową rolę odgrywa trzecia pochodna użyteczności. Jak przyznają niektórzy badacze, w świetle powyższych wyników, determinanty optymalnej prewencji nie są na dzień dzisiejszy opisane w sposób wyczerpujący, a samo zjawisko nie jest w pełni zbadane teoretycznie.

Kolejnym problemem była izolacja efektów samoubezpieczenia i prewencji. W wielu przypadkach różnica między nimi jest trudna do określenia, zaś często zdarza się, że aktywność danej osoby prowadzi zarówno do zmniejszenia rozmiarów ewentualnej szkody, jak i redukcji prawdopodobieństwa jej wystąpienia, jest więc inwestycją zarówno w samoubezpieczenie, jak i w prewencję. Na to zjawisko zwrócili uwagę już Ehrlich i Becker: „...dobrzy prawnicy potrafią zredukować zarówno prawdopodobieństwo wyroku skazującego, jak i jego wysokość". Dopiero jednak Lee (1998) formalnie zdefiniował „self-insurance-cum-protection" (SICP) jako połączenie samoubezpieczenia i samoochrony oraz zbadał jego podstawowe własności. Istnieje wiele przykładów SICP, są to np. zakup wysokiej jakości hamulców samochodowych, wykonywanie regularnych badań lekarskich, zakup kasku przez rowerzystę, zakup i instalacja automatycznych spryskiwaczy przeciwpożarowych, itp.

Przytoczony wcześniej cytat wskazuje, że wynajęcie prawnika jest także przykładem połączenia samoubezpieczenia i prewencji. Sevi i Yafil (2005) zauważyli jednak, że w pewnych systemach prawnych prawo pozwala na zwrot poniesionych kosztów w przypadku wygranej sprawy w sądzie. Koszty pokrywa na ogół strona przegrana. Standardowy model SP lub SICP nie uwzględnia jednak takiej sytuacji i wymaga modyfikacji związanej z ewentualną rekompensatą. Okazało się, że modyfikacja ta jest na tyle znacząca, że zmienia pewne podstawowe własności SP. W szczególności, Sevi i Yafil udowodnili, że inwestycja w usługi prawne jest monotoniczna względem stopnia awersji do ryzyka decydenta. W świetle cytowanych wcześniej wyników na temat własności SP, wynik ten oznacza, że wprowadzenie modyfikacji modelu polegającej na możliwości rekompensaty kosztów jest istotną zmianą i że mamy do czynienia z jakościowo innym zjawiskiem. Sevi i Yafil rozważali jednak problem tylko w modelu prewencji, co w praktyce oznacza, że poczynili założenie o tym, że wielkość ewentualnej straty (kwoty zasądzonej) jest stała w każdym przypadku. Jest to o tyle zaskakujące, że jak sami autorzy podają, inspirowali sie w swojej pracy wspomnianym cytatem Ehrlicha i Beckera, który jednoznacznie wskazuje na użycie modelu SICP.

W niniejszej pracy uogólnimy wspomniany wynik Sevi i Yafila na przypadek SICP. W praktyce oznacza to, że udowodnimy monotoniczność inwestycji w usługi prawne względem poziomu awersji do ryzyka porzucając założenie o tym, że wysokość straty jest stała. W rozdziale 2 wprowadzimy model SICP i zmodyfikujemy go o ewentualność zwrotu kosztów sadowych. Wykażemy przy tym, że istotną rolę dla wyniku odgrywa geometria strat.

Rozdział 3 jest poświęcony głównemu celowi tej pracy, czyli interpretacji i wytłumaczeniu powyższego wyniku za pomocą pojęcia ryzykowności w sensie Rothschilda-Stiglitza. Udowodnimy, że wzrost inwestycji w SICP powoduje wzrost ryzykowności związanej z bogactwem końcowym. To przy wzroście poziomu awersji do ryzyka spowoduje spadek oczekiwanej użyteczności końcowego bogactwa. Z tego powodu osoby bardziej niechętne ryzyku decydują się na zmniejszenie poziomu inwestycji w zrekompensowane SICP.

2. MODEL I PODSTAWOWY WYNIK

Rozważmy decydenta o ustalonym majątku początkowym w. Część tego majątku jest zagrożona ryzykiem straty w wyniku ewentualnego niekorzystnego wyroku sądowego. Decydent inwestuje kwotę e wybierając adwokata, który będzie go reprezentował. Poziom takiej inwestycji ma wpływ zarówno na prawdopodobieństwo przegranej, jak i na wysokość straty (wielkość zasądzonej kwoty). Są one więc funkcjami zmiennej e. Będziemy je oznaczać $p(e)$ i $l(e)$ odpowiednio. Zakładamy, że $0 \leq p(e) \leq 1$ i $l(e) \geq 0$ oraz że obie funkcje są dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły. O pochodnych tych funkcji zakładać będziemy[3], że $p' < 0$, $p'' > 0$, $l' < 0$, $l'' > 0$.

Sevi i Yafil (2005) zauważyli, że w wielu systemach prawnych w razie zwycięstwa w sądzie koszty wynajmu adwokata (oraz inne koszty sądowe) mogą być zrekompensowane przez stronę przegraną. Tradycyjny model SP nie uwzględnia takiej sytuacji i musi być zmodyfikowany poprzez dostosowanie do możliwości rekompensaty. Zostało to dokonane w pracy Sevi'ego i Yafila, jednakże warto zauważyć że użycie modelu SP oznacza, że w konsekwencji zakłada się iż wysokość możliwej straty nie zależy od wielkości inwestycji w usługi prawne. Aby pominąć to założenie użyjemy modelu stanowiącego połączenie modeli SP i SI, czyli self-insurance-cum-protection

[3] Nierówności te wyrażają często spotykaną prawidłowość polegającą na tym, że wzrost inwestycji w usługi prawne pociąga za sobą spadek prawdopodobieństwa przegranej w sądzie oraz zasądzonej ewentualnie kwoty, ale tempo tych spadków jest coraz wolniejsze.

(SICP) wprowadzonego do literatury przez Lee (1998). Zmodyfikujemy ten model tak, aby uwzględniał możliwość ewentualnej rekompensaty.

Bogactwo końcowe jest więc zmienną losową która przyjmuje wartości

- $A = w - e - l(e)$ z prawdopodobieństwem $p(e)$,
- $B = w$ z prawdopodobieństwem $1 - p(e)$. (1)

Zachodzi oczywiście nierówność $A < B$. Celem decydenta jest wybór takiej wielkości e która zapewni maksymalizację oczekiwanej użyteczności końcowego bogactwa:

$$Eu = p(e)u(A) + \big(1 - p(e)\big)u(B),$$

gdzie u oznacza funkcję użyteczności bogactwa decydenta. Zakładać będziemy, że jest ona dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły, rosnąca i wklęsła, czyli że zachodzą nierówności $u' > 0$, $u'' \leq 0$. Wklęsłość użyteczności oznacza, że decydent przejawia awersję do ryzyka. Zakładać będziemy, że problem decydenta ma wewnętrzne rozwiązanie, które oznaczać będziemy e^*. Spełnia ono warunek konieczny istnienia ekstremum

$$\frac{\partial Eu}{\partial e} = p'(e)[u(A) - u(B)] - (l'(e) + 1)p(e)u'(A) = 0. \tag{2}$$

Zakładamy też, że zachodzi warunek drugiego rzędu[4] (wystarczający dla istnienia maksimum): $\frac{\partial^2 Eu}{\partial e^2} < 0$.

Zauważmy, że aby istniało wewnętrzne rozwiązanie problemu, musi zachodzić nierówność $l'(e^*) > -1$, a zatem $|l'(e^*)| < 1$. Warunek ten oznacza, że tempo spadku strat w sytuacji wzrostu inwestycji w usługi prawne nie może być zbyt duże. W przeciwnym przypadku użyteczność krańcowa byłaby zawsze dodatnia i problem decydenta nie mógłby mieć rozwiązania wewnętrznego. Osobie pozwanej opłacałoby się ciągle zwiększać wydatki, gdyż zapewniałoby to ciągły wzrost użyteczności. Mimo że nie wykluczamy takich przypadków, to bardziej realistyczna wydaje się sytuacja w której straty maleją w umiarkowanym tempie. W całej pracy zakładać więc będziemy, ze na każdym poziomie inwestycji zachodzi nierówność $|l'| < 1$. Jest to także zgodne z typowym w literaturze założeniem o wypukłości funkcji straty, z którego wynika, że bezwzględne nachylenie funkcji straty jest coraz mniejsze, co z kolei oznacza, że straty maleją, ale w coraz wolniejszym tempie[5].

---

[4] Aby zachodził ten warunek jest potrzebne dodatkowe założenie, np. takie jak w pracy Jullien i in. (1999), czyli $p''p \geq 2(p')^2$.

[5] W pracy Sevi'ego i Yafila nie występował ten problem, gdyż autorzy zakładali że funkcja straty jest stała, a zatem $l' = 0$.

Zajmiemy się teraz problem wpływem wzrostu awersji do ryzyka na decyzję o optymalnym poziomie inwestycji w usługi prawne w sytuacji możliwego zwrotu kosztów. W tym celu rozważymy drugiego decydenta będącego w tej samej sytuacji, co pierwszy, ale charakteryzującego się większą awersją do ryzyka. Przypomnijmy iż oznacza to, że dla dowolnego ryzyka premia za ryzyko w przypadku drugiego decydenta jest większa. Premia za ryzyko interpretowana jest na ogół jako kwota pieniężna, jaką dana osoba jest gotowa odstąpić, aby uniknąć ryzyka[6]. Zastosowanie tej definicji jest jednak mało praktyczne, gdyż oznaczałoby sprawdzenie zachowania w sytuacji każdego ryzyka (zmiennej losowej). Podstawą do analizy porównawczej jest w takich sytuacjach twierdzenie Pratta (1964). Mówi ono między innymi, że być bardziej niechętnym ryzyku oznacza mieć „bardziej wklęsłą" funkcję użyteczności. „Bardziej wklęsła" funkcja użyteczności powstaje przez złożenie z inną rosnącą i wklęsłą funkcją. Jak wiadomo, awersja do ryzyka jako taka jest integralnie związana z wklęsłością użyteczności. Zatem podstawowa intuicja wiążąca się z wzrostem awersji do ryzyka polega na wzroście wklęsłości użyteczności. Ta intuicja okazuje się być prawidłowa. Przypomnijmy formalnie twierdzenie Pratta:

Twierdzenie 1 (Pratt, 1964). Rozważmy dwóch decydentów o użytecznościach u i v odpowiednio oraz o tym samym bogactwie początkowym. Wówczas następujące warunki są równoważne:

a) użyteczność v reprezentuje większą awersję do ryzyka, niż u,

b) $-\frac{v''(x)}{v'(x)} \geq -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ dla dowolnego x,

c) istnieje funkcja T taka, że $T' > 0$, $T'' \leq 0$, $v(x) = T(u(x))$ dla dowolnego x.

Ponadto funkcję $\lambda_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ nazywa się *indeksem bezwzględnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta*.

Niech zatem v oznacza użyteczność reprezentującą większą awersję do ryzyka, niż u. Z twierdzenia Pratta wiemy, że $v(x) = T(u(x))$ dla pewnej funkcji T rosnącej i wklęsłej.

Oczekiwana użyteczność końcowego bogactwa ma więc postać

$$Ev = p(e)T\big(u(A)\big) + \big(1 - p(e)\big)T\big(u(B)\big).$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum ma teraz postać

$$\frac{\partial Ev}{\partial e} = p'(e)\big[T\big(u(A)\big) - T\big(u(B)\big)\big] - (l^{'}(e) + 1)p(e)T'\big(u(A)\big)u'(A) = 0. \quad (3)$$

[6] Formalnie premia za ryzyko $\tilde{x}$ jest definiowana jako wielkość π spełniająca równanie $Eu(w + \tilde{x}) = u(w + E\tilde{x} - \pi)$.

Ponownie zakładamy, że warunek drugiego rzędu (wystarczający dla istnienia ekstremum) jest spełniony i że istnieje rozwiązanie wewnętrzne problemu, które oznaczać będziemy e_v.

Interesuje nas ustalenie relacji nierówności pomiędzy e_v i e^*, czyli między optymalnymi poziomami inwestycji w przypadku wzrostu awersji do ryzyka. Zachodzi następujące twierdzenia będące uogólnieniem wyniku pochodzącego z pracy Sevi i Yafila (dowód w aneksie na końcu pracy):

Twierdzenie 2. Jeśli bezwzględne nachylenie krzywej strat jest stale mniejsze niż 1, tzn. $l' > -1$, to wzrost awersji do ryzyka powoduje spadek inwestycji w usługi prawne, których koszty mogą być zwrócone w razie wygranej sprawy w sądzie.

Sevi i Yafil udowodnili analogiczne twierdzenie w przypadku SP, co faktycznie oznacza wprowadzenie dodatkowego założenia o tym, że funkcja straty jest stała niezależnie od poziomu inwestycji w usługi prawnicze. Twierdzenie 2 mówi więc, że jest to założenie zbędne i może być pominięte.

Po drugie, przypomnijmy, że jeśli koszty adwokata nie podlegają ewentualnemu zwrotowi w razie wygranej, to teza powyższego twierdzenia przestaje być prawdziwa. Do opisu sytuacji potrzebny jest wówczas standardowy model SP lub SICP o których wiadomo, że optymalne rozwiązanie problemu nie jest monotoniczne względem awersji do ryzyka. Zatem założenie o możliwości zwrotu kosztów w przypadku wygranej jest kluczowe dla powyższego twierdzenia.

3. INTERPRETACJA WYNIKU ZA POMOCĄ RYZYKOWNOŚCI W SENSIE ROTHSCHILDA-STIGLITZA

Przy ustalonym poziomie inwestycji w zrekompensowane SICP, użyteczność bogactwa końcowego decydenta opisanego wzorem (1), charakteryzuje się określonym poziomem ryzykowności w sensie Rotschilda-Stiglitza. Rozważmy mały wzrost inwestycji w zrekompensowane SICP od e^* do $e^* + \delta$. Naszym celem jest porównanie ryzykowności w sensie Rothschilda-Stiglitza obu zmiennych losowych. Przypomnijmy, że Rothschild i Stiglitz wykazali równoważność szeregu warunków opisujących wzrost ryzykowności zmiennej losowej.

Twierdzenie 3 (Rothschild, Stiglitz, 1970). Niech X i Y oznaczają zmienne losowe oraz F i G – dystrybuanty ich rozkładów prawdopodobieństwa. Załóżmy, że $EX = EY$. Wówczas następujące warunki są równoważne[7]:

a) Zmienna losowa Y ma taki sam rozkład jak zmienna $X + Z$, gdzie Z jest tzw. „białym szumem”, tzn. $E[Z|X] = 0$.

[7] Dla prostoty zakładamy, że nośniki obu gęstości są zawarte w przedziale $[a, b]$.

b) $\int_a^x F(t)dt \le \int_a^x G(t)dt$ dla dowolnego $x \in [a,b]$.

c) Dla każdej rosnącej i wklęsłej funkcji u zachodzi $Eu(X) \ge Eu(Y)$.

Każdy z powyższych warunków może być uznany za definicję wzrostu ryzykowności zmiennej losowej. Jeśli zachodzi któryś z nich (a zatem każdy), to mówimy, że zmienna losowa Y jest bardziej ryzykowna, niż zmienna X. Mówi się też, że zmienna Y cechuje się większą ryzykownością, niż zmienna X.

W opisywanej sytuacji zmiana poziomu inwestycji przez decydenta powoduje zmianę dystrybuanty użyteczności bogactwa końcowego z F na F^δ. Wówczas zachodzi następująca zależność:

Twierdzenie 4. Jeśli decydent jest niechętny ryzyku, to mały wzrost inwestycji w zrekompensowane SICP powoduje, że wzrasta ryzykowność w sensie Rothschilda-Stiglitza użyteczności bogactwa końcowego decydenta.

Dowód. Wprowadźmy oznaczenia

$$u_B^\delta = u_B = u(w),$$

$$u_A = u\big(w - e^* - l(e^*)\big),$$

$$u_A^\delta = u\big(w - (e^* + \delta) - l(e^* + \delta)\big),$$

$$p^\delta = p(e^* + \delta).$$

Wielkości u_A i u_B są wartościami, jakie może pierwotnie przyjmować interesująca nas zmienna losowa przed wzrostem inwestycji, zaś u_A^δ i u_B^δ są to wartości przyjmowane przez zmienną losową po wzroście inwestycji do poziomu $e^* + \delta$. Wzrost inwestycji powoduje też zmianę prawdopodobieństwa, z jakim wystąpi szkoda z poziomu $p(e^*)$ do p^δ.

Przypomnijmy, że e^* maksymalizuje oczekiwaną użyteczność, a zatem zachodzi warunek konieczny istnienia ekstremum (2). Oznacza on, że krańcowa oczekiwana użyteczność bogactwa końcowego jest równa zeru, a zatem odpowiednio mała (jednostkowa) zmiana tej wielkości nie zmieni oczekiwanej użyteczności. To oznacza, że

$$p^\delta u_A^\delta + \big(1 - p^\delta\big)u_B^\delta = pu_A + (1-p)u_B. \tag{4}$$

Zauważmy, że powyższa równość mówi w szczególności, że zmiana z F na F^δ odbywa się z zachowaniem średniej.

Z założenia $l' + 1 > 0$ wynika, że funkcja $x \mapsto x + l(x)$ jest rosnąca. Stąd wynika nierówność

$$(e^* + \delta) + l(e^* + \delta) > e^* + l(e^*).$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$w-(e^*+\delta)-l(e^*+\delta)<w-e^*-l(e^*).$$

Funkcja użyteczności jest rosnąca, a zatem możemy napisać

$$u\big(w-(e^*+\delta)-l(e^*+\delta)\big)<u\big(w-e^*-l(e^*)\big).$$

Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami, zachodzi nierówność

$$u_A^\delta<u_A.$$

Zatem użyteczności pojawiające się w równości (3) mogą być uporządkowane następująco:

$$u_A^\delta<u_A<u_B^\delta=u_B.$$

Aby skorzystać z twierdzenia Rothschilda i Stiglitza, obliczymy całki z obu dystrybuant. Po prostych obliczeniach otrzymujemy, że

$$\int_a^x F(t)dt=\begin{cases}0, & dla\ x\in[a,u_A),\\ (x-u_A)p, & dla\ x\in[u_A,u_B),\\ (u_B-u_A)p+(x-u_B), & dla\ x\geq u_B,\end{cases}$$

oraz

$$\int_a^x F^\delta(t)dt=\begin{cases}0, & dla\ x\in[a,u_A^\delta),\\ (x-u_A^\delta)p^\delta, & dla\ x\in[u_A^\delta,u_B^\delta),\\ (u_B^\delta-u_A^\delta)p^\delta+(x-u_B^\delta), & dla\ x\geq u_B^\delta.\end{cases}$$

Oczywiście, zachodzi $\int_a^x F(t)dt=\int_a^x F^\delta(t)dt$ dla $x\leq u_A^\delta$. Z kolei dla $x\in(u_A^\delta,u_A)$ mamy $\int_a^x F(t)dt=0$ oraz $\int_a^x F^\delta(t)dt>0$.

Przypomnijmy, że $u_B^\delta=u_B$. Wówczas równość (4) możemy przekształcić do postaci

$$p^\delta\big(u_B^\delta-u_A^\delta\big)=p(u_B-u_A).$$

Wtedy dla $x\geq u_B^\delta$ zachodzi równość $\int_a^x F(t)dt=\int_a^x F^\delta(t)dt$.

Zauważmy teraz, że $\int_a^{u_B} F(t)dt=\int_a^{u_B} F^\delta(t)dt$, zaś dla x = u_A zachodzi $\int_a^{u_A} F(t)dt=0$ oraz $\int_a^{u_A} F^\delta(t)dt>0$. Obie całki są liniowe względem *x*, więc na przedziale $[u_A,u_B)$ zachodzi nierówność

$$\int_a^x F(t)dt < \int_a^x F^\delta(t)dt.$$

Podsumowując, udowodniliśmy, że nierówność

$$\int_a^x F(t)dt \le \int_a^x F^\delta(t)dt$$

jest spełniona przez wszystkie $x \in [a,b]$. To oznacza, że zmienna losowa odpowiadająca dystrybuancie F dominuje stochastycznie w sensie drugiego rzędu nad zmienną odpowiadającą dystrybuancie F^δ. W połączeniu z faktem, że zmiana z F na F^δ odbywa się z zachowaniem średniej, udowodniliśmy, że zachodzi warunek b) w twierdzeniu Rothschilda-Stiglitza. Po wzroście inwestycji w SICP nowa zmienna losowa jest więc bardziej ryzykowna, co kończy dowód.

Korzystając teraz z punktu c) tego samego twierdzenia, przyjmując jako funkcję rosnącą i wklęsłą funkcję T z twierdzenia Pratta o wzroście awersji do ryzyka, otrzymujemy wniosek, że decydent bardziej niechętny ryzyku preferuje mniej ryzykowną zmienną losową, czyli tę odpowiadającą dystrybuancie F.

Podsumowując, niewielki wzrost inwestycji w zrekompensowane SICP powoduje u osoby bardziej niechętnej ryzyku spadek oczekiwanej użyteczności końcowego bogactwa. Odwracając całe rozumowanie, spadek inwestycji spowoduje wzrost oczekiwanej użyteczności a zatem taka osoba zainwestuje mniej niż e^*.

4. KONKLUZJA

Optymalny poziom prewencji (SP) nie jest na ogół monotoniczny względem awersji do ryzyka decydenta. Jest to spowodowane tym, że wzrost inwestycji w SP nie przekłada się jednoznacznie na spadek ryzykowności zmiennej losowej związanej z problemem. W konsekwencji, kłopotliwe jest ustalenie kierunku efektu dochodowego, który często wiąże się z typem awersji do ryzyka decydenta. Okazuje się jednak, że jeśli istnieje możliwość rekompensaty kosztów (tak jak w przypadku wygranego procesu sądowego) to inwestycja w prewencję jest monotoniczna względem poziomu awersji do ryzyka. W niniejszej pracy uogólniliśmy tę zależność na model SICP, co w praktyce oznacza, że założenie o stałym poziomie strat jest nieistotne dla prawdziwości tezy. Kluczowe jest założenie o możliwości zwrotu kosztów oraz kształt funkcji straty.

Głównym celem pracy było jednak spojrzenie na problem pod innym kątem. Udowodniliśmy, że wzrost inwestycji w zrekompensowane SICP, a zatem przykładowo wynajęcie droższego i bardziej efektywnego prawnika, powoduje wzrost ryzykowności w sensie Rothschilda-Stiglitza użyteczności bogactwa końcowego decydenta. To wyjaśnia w nowy sposób związek między poziomem awersji do ryzyka decydenta a jego inwestycją w prewencję i tłumaczy pozornie paradoksalną tezę twierdzenia 2. Osoby o zwiększonym poziomie awersji do ryzyka preferują mniej ryzykowne przedsięwzięcia, więc redukują poziom prewencji.

Istnieje kilka możliwych dalszych kierunków rozwoju tej teorii. Jednym z nich na pewno jest zbadanie kierunku efektu dochodowego na wybór prawnika. Innym byłoby rozważenie przypadku wielu stanów świata, gdyż istniejąca do tej pory analiza teoretyczna ogranicza się tylko do dwóch stanów. Wymaga to jednak poważnego uogólnienia modelu, zaś niektóre wyniki mogą się okazać jakościowo odmienne od dotychczasowych, jak to pokazał Lee (2005) w pracy na temat efektu dochodowego w przypadku samoubezpieczenia (SI).

Uniwersytet Gdański

LITERATURA

[1] Briys E., Schlesinger H., (1990), Risk Aversion and the Propensities for Self – Insurance and Self-Protection, *Southern Economic Journal*, 57 (2), 458-467.
[2] Chiu W. H., (2005), Degree of Downside Risk Aversion and Self-Protection, *Insurance: Mathematics and Economics*, 36, 93-101.
[3] Chiu W. H., (2000), On the Propensity to Self-Protect, *Journal of Risk and Insurance*, 67 (4), 555–577.
[4] Courbage C., (2001), Self-Insurance, Self-Protection and Market Insurance Within the Dual Theory of Choice, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 26 (1), 43-56.
[5] Dionne G., Eeckhoudt L., (1985), Self-Insurance, Self-Protection and Increasing RiskAversion, *Economics Letters*, 17 (1-2), 39-42.
[6] Dionne G., Li, J., (2010), The Impact of Prudence on Optimal Prevention Revisited, CIRRELT – 2010-33.
[7] Eeckhoudt L., Gollier, C., (2005), The Impact of Prudence on Optimal Prevention, *Economic Theory*, 26, 989-994.
[8] Ehrlich I., Becker G. S., (1972), Market Insurance, Self-Insurance, and Self-Protection, *Journal of Political Economy*, 80 (4), 623-648.
[9] Jullien B., Salanie B., Salanie F., (1999), Should More Risk-Averse Agents Exert More Effort?, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24 (1), 19-25.
[10] Lee K., (1998), Risk Aversion and Self-Insurance-cum-Protection. *Journal of Risk and Uncertainty,* 17, 139-150.
[11] Lee K. (2005), Wealth Effects on Self-Insurance and Self-Protection against Monetary and Nonmonetary Losses, *The Geneva Risk and Insurance Review,* 30, 147-159.
[12] Lee K. (2010), Wealth Effects on Self-Insurance, The Geneva Risk and Insurance Review 35, 160-171.
[13] Pratt J. W., (1964), Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, 32, 122-136.
[14] Rothschild M., Stiglitz J., (1970), Increasing Risk. I. A Defnition, *J. Econ. Theory* 2, 225-243.
[15] Sweeney G., Beard, T. R., (1992), The Comparative Statics of Self – Protection, *Journal of Risk and Insurance*, 59, 301-309.
[16] Sevi B., Yafil F., (2005), A Special Case of Self-Protection: The Choice of a Lawyer, *Economics Bulletin*, 4 (6), 1-8.

ANEKS

Twierdzenie. Załóżmy, że dane są punkty $A,B \in \mathbb{R}$ takie, że $A < B$. Wówczas dla każdej funkcji użyteczności u reprezentującej awersję do ryzyka istnieje użyteczność v taka, że

1) $v(A) = A$ i $v(B) = B$,
2) v reprezentuje te same preferencje wobec ryzyka, co u,
3) $v'(A) > 1$ oraz $v'(B) < 1$.

Dowód. Łatwo zauważyć, że funkcja

$$v(x) = \frac{B - A}{u(B) - u(A)} u(x) + A - \frac{B - A}{u(B) - u(A)} u(A)$$

spełnia równości $v(A) = A$ i $v(B) = B$. Ponadto funkcja v jest dodatnią afiniczną transformacją użyteczności u, więc z twierdzenia von Neumanna-Morgensterna reprezentuje te same preferencje wobec ryzyka, co u.

Aby udowodnić trzecią własność, zauważmy, ze z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje $\xi \in (A,B)$ takie, że

$$v'(\xi) = \frac{v(B) - v(A)}{B - A} = \frac{B - A}{B - A} = 1.$$

Skoro funkcja v jest wklęsła, to v' jest malejąca, a ponieważ $A < \xi$, to zachodzi

$$v'(A) > v'(\xi),$$

a zatem

$$v'(A) > 1.$$

Nierówność $v'(B) < 1$ dowodzimy analogicznie.

Dowód twierdzenia 2: Problemy obu decydentów są wklęsłe, więc zbadamy znak wyrażenia $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ pochodzącego z (3) do którego wstawimy rozwiązanie problemu (2), czyli e^*. Skoro Ev jest wklęsłe, to $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ jest malejące i przyjmuje wartość zerową w punkcie e_v. Zatem

$$\left.\frac{\partial Ev}{\partial e}\right|_{e=e^*} \leq 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } e_v \leq e^*.$$

Udowodnimy, że znak wyrażenia $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ obliczonego w punkcie e^*, czyli rozwiązaniu równania (2), jest ujemny.

Korzystając z poprzedniego twierdzenia możemy założyć bez zmniejszenia ogólności, że zachodzą równości $T(u(A)) = u(A)$ i $T(u(B)) = u(B)$. Z równania (2) otrzymujemy, że

$$p'(e^*) = \frac{(l'(e^*)+1)p(e^*)u'(A)}{u(A)-u(B)}.$$

Po podstawieniu tej wielkości do $\frac{\partial Ev}{\partial e}$ i po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\left.\frac{\partial Ev}{\partial e}\right|_{e=e^*} = (l'(e^*)+1)p(e^*)u'(A)\big[1 - T'\big(u(A)\big)\big].$$

Pierwsze trzy czynniki są dodatnie, zaś ostatni jest ujemny (z powyższego twierdzenia), więc zachodzi nierówność

$$\left.\frac{\partial Ev}{\partial e}\right|_{e=e^*} < 0.$$

Stąd wnioskujemy, że $e_v < e^*$, co było naszym celem.

WPŁYW AWERSJI DO RYZYKA NA WYBÓR PRAWNIKA – INTERPRETACJA ZA POMOCĄ RYZYKOWNOŚCI W SENSIE ROTHSCHILDA – STIGLITZA

Streszczenie

W niniejszej pracy zajmujemy się problemem wyboru prawnika poprzez zastosowanie modelu stanowiącego połączenie samoubezpieczenia i prewencji (SICP) w sytuacji możliwości zwrotu kosztów w razie wygranej sprawy w sądzie. Jako pierwsi zagadnienie badali Sevi i Yafil (2005) jednak tylko w kontekście prewencji, co oznacza wprowadzenie dodatkowego założenia, że wielkość poniesionej straty jest stała niezależnie od poniesionych kosztów. W tej pracy uogólniamy wynik Sevi i Yafila dowodząc, że założenie o stałych stratach jest nieistotne. Wykazujemy że wzrost awersji do ryzyka powoduje spadek inwestycji w usługi prawne, których koszty mogą być zwrócone w razie wygranej sprawy w sądzie, co jak wiadomo, nie jest prawdą w standardowych modelach prewencji i SICP. Ponadto interpretujemy ten wynik za pomocą pojęcia ryzykowności w sensie Rothschilda-Stiglitza. Dowodzimy, że wzrost inwestycji w SICP powoduje wzrost ryzykowności związanej z bogactwem końcowym. W konsekwencji osoby bardziej niechętne ryzyku decydują się na zmniejszenie poziomu inwestycji w zrekompensowane SICP.

Słowa kluczowe: prewencja, awersja do ryzyka, ryzykowność w sensie Rothschilda-Stiglitza

EFFECT OF INCREASE IN RISK-AVERSION ON THE CHOICE OF A LAWYER
– INTERPRETATION IN THE CONTEXT OF ROTHSCHILD-STIGLITZ RISKINESS

Abstract

We consider decision about the choice of a lawyer as a particular case of self-insurance-cum-protection when the lawyer's cost is repaid in case of victory. The problem was introduced by Sevi and Yafil (2005) in the context of self-protection, which requires assumption that the size of loss does not depend on effort (level of the expenditure on lawyer). In this paper we drop that assumption and our model includes possibility that both loss and probability of incurring a loss depend on effort. We prove that unlike the standard cases of SP and SICP, the level of effort is monotone in risk aversion. We interpret and explain the result in terms of mean-preserving spread and increasing riskiness in the sense of Rothschild-Stiglitz. We prove that increase in SICP with indemnity leads to increased riskiness of the utility of final wealth. As a consequence, the more risk-averse individual is, the less she invests in legal expenses.

Keywords: self-protection, self-insurance-cum-protection, riskiness, risk-aversion