



AGNIESZKA SUROWIAK\*

## Wpływ rozkładu gęstości ziaren na rozkład ich prędkości opadania dla wąskich klas ziarnowych

### Wprowadzenie

Przez argument rozdziału rozumie się właściwość fizyczną lub geometryczną ziarna, na podstawie której dokonuje się podziału zbioru ziaren na podzbiory nie mające części wspólnej, a różniące się wartością tej właściwości. W przemysłowych procesach rozdziału występuje najczęściej podział na dwa lub trzy produkty, przy czym podział ten nie jest dokładny ze względu na zjawisko rozproszenia ziaren do sąsiednich produktów rozdziału. W przypadku procesów wzbogacania z różnicą wartości argumentu rozdziału wiąże się na ogół zróżnicowanie zawartości składników.

Wśród argumentów rozdziału wyróżnić można argumenty proste oraz argumenty złożone. Do argumentów prostych należą gęstość, podatność magnetyczna, wielkość ziarna. Charakteryzują się one tym, że o przynależności do danego podzbioru decyduje tylko wartość jednej wielkości. Wartość argumentu jest uwarunkowana jedynie przez skład chemiczny ziarna lub sposób kreacji ziarna mineralnego. Rozkłady tych argumentów w próbkach są rozkładami jednowymiarowymi.

Przykładem argumentu złożonego jest prędkość opadania ziarna w cieczy. Prędkość opadania w danej cieczy jest funkcją gęstości, wielkości i kształtu ziarna. Poza tym jej wartość zależy również od właściwości medium, w którym przebiega rozdział. Argument ten

---

\* Dr inż., AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Górnicztwa i Geoinżynierii,  
Katedra Inżynierii Środowiska i Przeróbki Surowców, Kraków; e-mail: asur@agh.edu.pl

jest więc funkcją co najmniej dwóch zmiennych. O przynależności do danego podzbioru (produktu rozdziału) decydują wartości trzech wielkości, a rozkład tych argumentów prostych jest rozkładem wielowymiarowym. Jeżeli gęstość jest zależna od wielkości ziarna traktowanej jako parametr, wtedy funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania będzie rozkładem złożonym.

Ogólne rozwiązanie problemu określenia rozkładu granicznej prędkości opadania ziaren musi uwzględniać wielowymiarowe rozkłady właściwości ziaren oraz wzory wiążące te właściwości z prędkością opadania. Jedną z metod rozwiązania tego zagadnienia jest potraktowanie wielowymiarowego rozkładu właściwości ziarna jako iloczynu jednowymiarowych rozkładów poszczególnych cech, tzn. przyjęcie założenia, że cechy te są zmiennymi losowymi niezależnymi, co w literaturze zostało już zastosowane (Niedoba 2013a, b; Tumidajski 1997).

W tej pracy zostanie rozważony wpływ gęstości ziarna na rozkład granicznej prędkości opadania przy założeniu, że wielkość oraz kształt ziarna są stałe (wąskie klasy ziarnowe, ziarna kuliste).

## 1. Prędkość opadania ziarna sferycznego jako zmienna losowa

W światowej literaturze przedmiotu problemowi wyliczania granicznej prędkości opadania ziarna poświęcono wiele prac (Finkey 1924; Laszczenko 1940; Olevskij 1953; Heiss i Coull 1952; Akkerman 1966; Christiansen i Barker 1965; Bedran i in. 1976; Concha i Almendra 1979; Heider i Levenspiel 1989; Briens 1991; Saha i in. 1992; Madhav i Chhabra 1994, 1995; Nguyen i in. 1994, 1997; Tsakalakis i Stamboltzis 2001; Merinov 2001; Sztaba 2004). Autorzy przedstawiali w nich różne podejścia do zagadnienia i są to z reguły metody aproksymacyjno-obliczeniowe.

W tym artykule graniczną prędkość opadania wyznaczono opierając się na teorii wynikającej z rozwiązania równania ruchu ziarna. Przez graniczną prędkość opadania w ruchu jednostajnym rozumie się sytuację, w której suma geometryczna sił działających na ziarno, a więc siły ciężkości, siły oporu hydrostatycznego oraz siły oporu ośrodka, będzie równa zero.

W ruchu turbulentnym siłę oporu dynamicznego ośrodka wyraża wzór Newtona:

$$P = -\psi_z \frac{1}{2} \rho_o v_t^2 S \quad (1)$$

- $v_t$  – prędkość chwilowa ruchu ziarna,
- $\psi_z$  – współczynnik oporu dla ziarna,
- $S$  – powierzchnia rzutowa ziarna na płaszczyznę prostopadłą do kierunku ruchu,
- $\rho_o$  – gęstość cieczy,
- $\frac{1}{2} \rho_o v_t^2 S$  – ciśnienie hydrodynamiczne cieczy.

W związku z tym równanie ruchu ziarna w kierunku pionowym, po uwzględnieniu bilansu działających sił, będzie następujące:

$$\rho V \frac{dv_t}{dt} = (\rho - \rho_o) \Psi g - \psi_z \frac{1}{2} \rho_o v_t^2 S \quad (2)$$

- ↗  $\rho$  – gęstość ziarna,  
 $g$  – przyspieszenie ziemskie,  
 $V$  – objętość ziarna.

Wzór określający granicę:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_t = \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_o) \Psi g}{\psi_z \rho_o S}} = v \quad (3)$$

jest zarazem ogólnym wzorem na graniczną prędkość opadania swobodnego ziarna ( $v$ ). Jego szczegółowa postać musi uwzględniać kształt ziarna, charakteryzowany współczynnikami kształtu oraz wartość współczynnika oporu. Dla ziaren sferycznych współczynnik oporu  $\psi_z = 0,46$  (Abraham 1970).

Po uwzględnieniu we wzorze (3) wzorów na objętość ziarna sferycznego oraz jego pola powierzchni, graniczna prędkość opadania ziarna wyraża się następująco (Brożek i Surowiak 2010):

$$v = 5,33 \sqrt{x} \sqrt{d} \quad (4)$$

- ↗  $x = \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o}$  – zredukowana gęstość względna,  
 $d$  – wielkość ziarna,  
 $v$  – graniczna prędkość opadania ziarna kulistego.

Jak zauważono we wstępie, w przypadku ogólnym kierowana do procesu rozdziału nadawa charakteryzuje się rozkładem właściwości fizycznych i geometrycznych ziarna, a w związku z tym również prędkości opadania.

Ziarna sferyczne są szczególnym zbiorem ziaren stanowiących swego rodzaju podzbiór ziaren, które mogą trafiać do procesów rozdziału razem z ziarnami nieregularnymi występującymi także w nadawie. Graniczna prędkość opadania ziarna sferycznego jest funkcją dwóch argumentów prostych: jego gęstości i wielkości z uwagi na fakt, że współczynnik kształtu jest równy 1. Zarówno wielkość ziarna jak i jego gęstość są zmiennymi losowymi o określonych rozkładach. W związku z tym prędkość opadania ziarna jako funkcja dwóch zmiennych losowych będzie również zmienną losową o określonym rozkładzie wynikającym z rozkładów wielkości i gęstości ziarna w próbce.

Przy założeniu, że gęstość zredukowana  $x$  i średnica ziarna  $d$  są zmiennymi losowymi, prędkość opadania ziarna stanowi również zmienną losową będącą funkcją wymienionych zmiennych losowych. Postać funkcji gęstości rozkładu prędkości opadania jest zależna od funkcji gęstości rozkładów wymienionych zmiennych losowych. Funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej będącej iloczynem dwóch niezależnych zmiennych losowych  $W = S \cdot U$ , wyraża się następującym wzorem (Gerstenkorn i Śródka 1972):

$$h(w) = \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{1}{S} f_1(s) f_2\left(\frac{w}{s}\right) ds \quad (5)$$

↳  $h(w)$ ,  $f_1(s)$  i  $f_2(u)$  – funkcje gęstości rozkładów odpowiednio zmiennych losowych  $W$ ,  $S$  i  $U$ .

Generalnie rzecz biorąc metodyka wyznaczania rozkładu granicznej prędkości opadania ziarna oparta jest na doprowadzeniu wzoru na prędkość opadania ziarna do postaci będącej iloczynem dwóch (trzech) zmiennych losowych (Brożek i Surowiak 2004, 2005a, b; Surowiak i Brożek 2014).

### 1.1. Rozkład prędkości opadania w próbce monodispersyjnych ziaren sferycznych

Dla ziaren sferycznych współczynniki kształtu ziarna  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $d = d_o$ , gdzie  $d_o$  – wielkość ziaren nadawy. W tej sytuacji prędkość opadania ziarna sferycznego w wąskiej klasie ziarnowej (monodispersyjnej)  $v_{ms}$  wyraża się wzorem:

$$v_{ms} = 5,33 \sqrt{x} \sqrt{d_o} \quad (6)$$

Gęstość zredukowana  $x$  jest związana z gęstością ziarna zależnością:

$$x = \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} \quad (7)$$

skąd:

$$\rho = \rho_o x + \rho_o = \rho(x) \quad (8)$$

Przystępując do wyznaczenia rozkładu prędkości opadania ziaren charakteryzujących się zmienną losową  $P$  (gęstość ziarna  $\rho$ ) i pochodzących z wąskiej klasy ziarnowej o wielkości  $d_o$  przyjmujemy, że znany jest rozkład zmiennej losowej  $P$ . Rozkład prędkości opadania ziarna uzyskano wykorzystując wzór (4) i dwukrotnie stosując podstawowy wzór z rachunku prawdopodobieństwa, określający związki pomiędzy gęstością określonej zmiennej losowej  $X$  i gęstością funkcji tej zmiennej losowej.

Jeżeli gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$  określa funkcja  $f(x)$ , zmienna losowa  $Z$  określona jest funkcją odwracalną  $Z = g(X)$ , to gęstość zmiennej losowej  $Z$  określa wzór (Gerstenkorn i Śródka 1972):

$$f_1(z) = f[h(z)] \left| \frac{dh(z)}{dz} \right| \quad (9)$$

gdzie  $h(z)$  jest funkcją odwrotną do funkcji  $g(x)$ , czyli  $x = h(z)$ .

Przyjmijmy, że  $y_1 = \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o}$ . Otrzymujemy więc, że  $\rho = y_1 \rho_o + \rho_o = h(y_1)$ . Znając funkcję gęstości zmiennej losowej  $P$  równą  $f(\rho)$ , ze wzoru (9) mamy:

$$f_1(y_1) = \rho_o f(y_1 \rho_o + \rho_o) \quad (10)$$

Niech teraz  $y_2 = \sqrt{y_1}$  czyli  $y_1 = y_2^2$ . Powtarzając procedurę zastosowaną wyżej mamy:

$$f_2(y_2) = f_1(y_2^2) 2y_2 \quad (11)$$

Przyjmując wreszcie  $v = 5,33\sqrt{d_o} y_2$  czyli  $y_2 = \frac{v}{5,33\sqrt{d_o}}$  mamy:

$$f_3(v) = f_2 \left( \frac{v}{5,33\sqrt{d_o}} \right) \frac{1}{5,33\sqrt{d_o}} \quad (12)$$

## 1.2 Analiza wpływu rozkładu właściwości fizycznych i geometrycznych ziaren na rozkład prędkości opadania

### 1.2.1. Wpływ rozkładu gęstości ziaren na rozkład prędkości opadania

Dla oceny wpływu rozkładu gęstości ziaren na rozkład prędkości opadania wyznaczono funkcję gęstości rozkładu prędkości wyrażony wzorem (6), gdyż w tym przypadku pozostałe dwie zmienne (wielkość ziarna i jego kształt) mające wpływ na rozkład prędkości opadania mają wartości ustalone.

Funkcja gęstości rozkładu gęstości ziarna, zgodnie z dyspersyjnym modelem ziarna (Brożek 1995) jest wyrażona przez dwuparametrową funkcję z rodziny rozkładów gamma. Jest to funkcja rozkładu Weibulla, którego dystrybuanta i funkcja gęstości są następujące:

$$F(\rho) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^k \right] \right\} \quad (13)$$

$$f(\rho) = \frac{100k}{\rho_c^k} \rho^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^k \right] \quad (14)$$

↪  $\rho_c$  – gęstość charakterystyczna ( $F(\rho = \rho_c) = 63,21\%$ ),  
 $k$  – współczynnik niejednorodności.

Zgodnie ze wzorem (9) funkcja gęstości i dystrybuanta rozkładu gęstości zredukowanej wyrażają się wzorami:

$$f(x) = \frac{100k}{(x_c + 1)^k} (x+1)^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{x+1}{x_c + 1} \right)^k \right] \quad (15)$$

$$F(x) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x+1}{x_c + 1} \right)^k \right] \right\} \quad (16)$$

gdzie:

$$x_c = \frac{\rho_c - \rho_o}{\rho_o}$$

Rozkład zmiennej losowej  $Y_1 = \sqrt{X}$  według wzoru (12) jest następujący:

$$f_1(y_1) = \frac{200k}{(y_{1c}^2 + 1)^k} y_1 (y_1^2 + 1)^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{y_1^2 + 1}{y_{1c}^2 + 1} \right)^k \right] \quad (17)$$

$$F_1(y_1) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{y_1^2 + 1}{y_{1c}^2 + 1} \right)^k \right] \right\} \quad (18)$$

gdzie:

$$y_{1c} = \sqrt{x_c}$$

Rozkład zmiennej losowej  $Y_2 = 5,33Y_1$ , na podstawie wzoru (12), charakteryzuje się następującymi funkcjami:

$$f_2(y_2) = \frac{200k}{(y_{2c}^2 + 28,41)^k} y_2 (y_2^2 + 28,41)^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{y_2^2 + 28,41}{y_{2c}^2 + 28,41} \right)^k \right] \quad (19)$$

$$F_2(y_2) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{y_2^2 + 28,41}{y_{2c}^2 + 28,41} \right)^k \right] \right\} \quad (20)$$

gdzie:

$$y_{2c} = 5,33y_{1c}$$

Po przytoczonych wyżej kolejnych przekształceniach rozkład prędkości opadania w próbkę monodispersyjnych ziaren sferycznych zgodnie ze wzorami (12) i (13) jest następujący:

$$h(v_{ms}) = \frac{200k}{(v_{msc}^2 + 28,41d_o)^k} v_{ms} (v_{ms}^2 + 28,41d_o)^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{v_{ms}^2 + 28,41d_o}{v_{msc}^2 + 28,41d_o} \right)^k \right] \quad (21)$$

$$H(v_{ms}) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{v_{ms}^2 + 28,41d_o}{v_{msc}^2 + 28,41d_o} \right)^k \right] \right\} \quad (22)$$

- $d_o$  – średnica ziaren próbki,  
 $v_{msc}$  – charakterystyczna prędkość opadania ziarna sferycznego równa:

$$v_{msc} = \sqrt{d_o} y_{2c} = 5,33 \sqrt{d_o \frac{\rho_c - \rho_o}{\rho_o}} \quad (23)$$

Jak widać ze wzorów (21) i (22) funkcja rozkładu prędkości opadania w tym przypadku jest wyrażona przez parametry rozkładu gęstości ziaren i ich średnicę. Analogicznie jak dla rozkładu gęstości jest to również rozkład Weibulla.

## 2. Eksperyment

Do wyliczenia rozkładu prędkości opadania ziaren w wąskiej klasie ziarnowej opróbowano osadzarkę przemysłową dwuproduktową firmy Allmineral, o powierzchni roboczej równej 17 m<sup>2</sup>, pracującą w zakładzie przeróbki mechanicznej jednej z kopalń węgla kamiennego.

Doświadczenia wykonano przy zachowaniu stałej liczby pulsacji, która wynosiła 26 cykli na minutę. Wydajność systemu, czyli natężenie przepływu nadawy wynosiło 500 Mg/h, a dopływ wody dolnej 218 m<sup>3</sup>/h. Przy tak ustalonych parametrach, po ustabilizowaniu procesu, pobierano próbki nadawy, koncentratu i odpadów. Następnie każdy z produktów rozdziału (koncentrat i odpady) poddano analizie densymetrycznej i granulometrycznej. Analizę densymetryczną wykonano w roztworach chlorku cynku o gęstościach odpowiednio: 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 2,0 Mg/m<sup>3</sup>. Każdą frakcję densymetryczną rozsiano na sitach o wielkości oczek: 2,0; 3,15; 5,0; 6,3; 8,0; 10,0; 12,5; 16,0; 20,0 mm. Dla zbadania wpływu rozkładu gęstości na rozkład prędkości opadania z nadawy do osadzarki Allmineral wysiano wąskie klasy ziarnowe: 2–3,15 mm, 3,15–5,0 mm, 8–10 mm, 16–20 mm. W tak przygotowanej próbce wykonano analizy densymetryczne. W celu obliczenia pól powierzchni i średnicy projekcyjnej ziaren na losowej próbce ziaren nadawy w klasie 8–20 mm o liczności 305 ziaren wykonano zdjęcia ziaren aparatem cyfrowym w położeniu najbardziej stabilnym. Korzystając z programu komputerowego do analizy obrazu wyliczono pola powierzchni i obwody poszczególnych ziaren. Wyliczono średnice projekcyjne  $d_p$  i wyznaczono rozkład średnicy projekcyjnej stosując wzór:

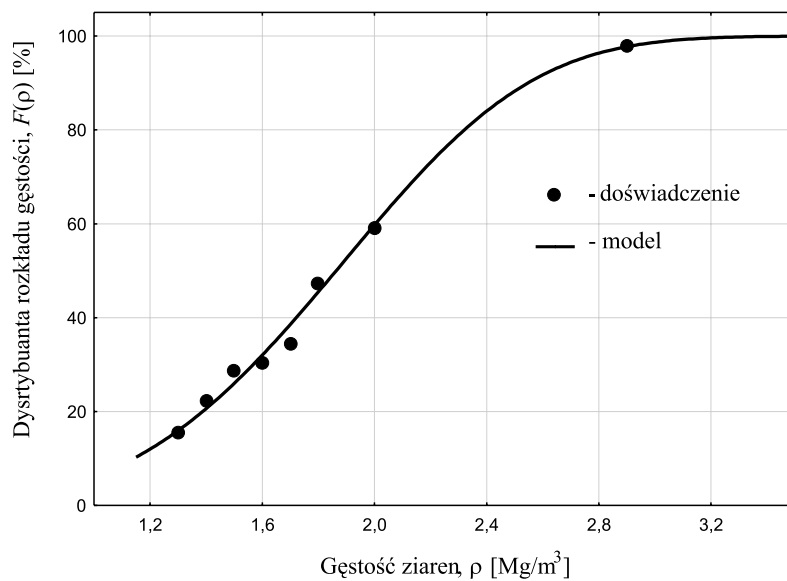
$$d_p = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} \quad (24)$$

↪  $S$  – pole powierzchni ziarna.

## 3. Opracowanie wyników

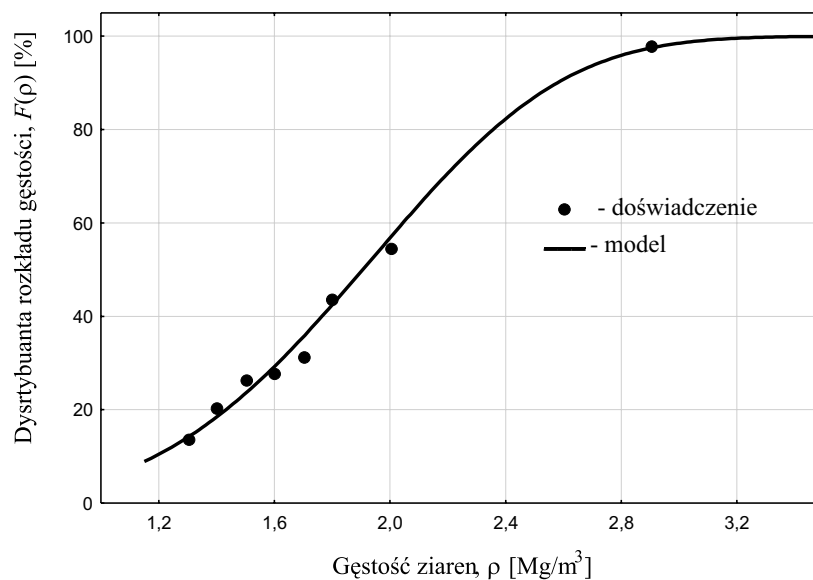
Na podstawie otrzymanych wyników wyliczono współrzędne dystrybuant rozkładu gęstości dla wąskich klas ziarnowych, a następnie do dystrybuant empirycznych dopasowano rozkłady Weibulla. Ponadto dla klasy 8–10 mm wyznaczono dystrybuantę rozkładu gęstości w odpadach. Z aproksymacji wyników doświadczalnych uzyskano dla każdego rozkładu





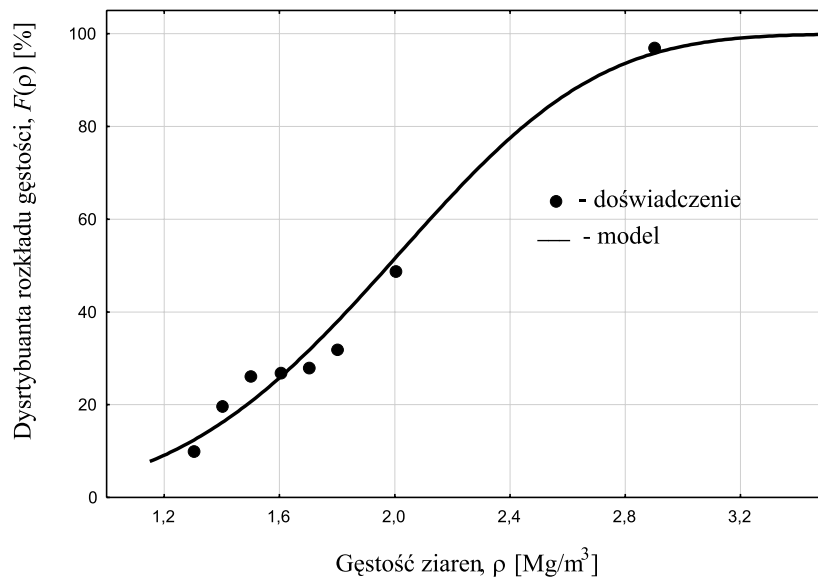
Rys. 1. Rozkład gęstości ziaren w klasie 2–3,15 mm,  $\rho_c = 2,05 \text{ Mg/m}^3$ ;  $k = 3,84$

Fig. 1. Particle density distribution for fraction 2–3.15 mm,  $\rho_c = 2.05 \text{ Mg/m}^3$ ;  $k = 3.84$



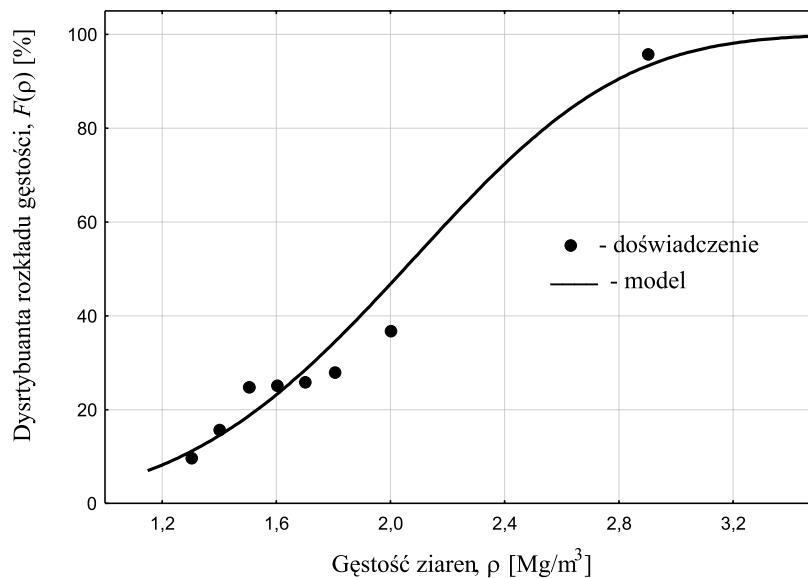
Rys. 2. Rozkład gęstości ziaren w klasie 3,15–5 mm,  $\rho_c = 2,09 \text{ Mg/m}^3$ ;  $k = 3,97$

Fig. 2. Particle density distribution for fraction 3.15–5 mm,  $\rho_c = 2.09 \text{ Mg/m}^3$ ;  $k = 3.97$



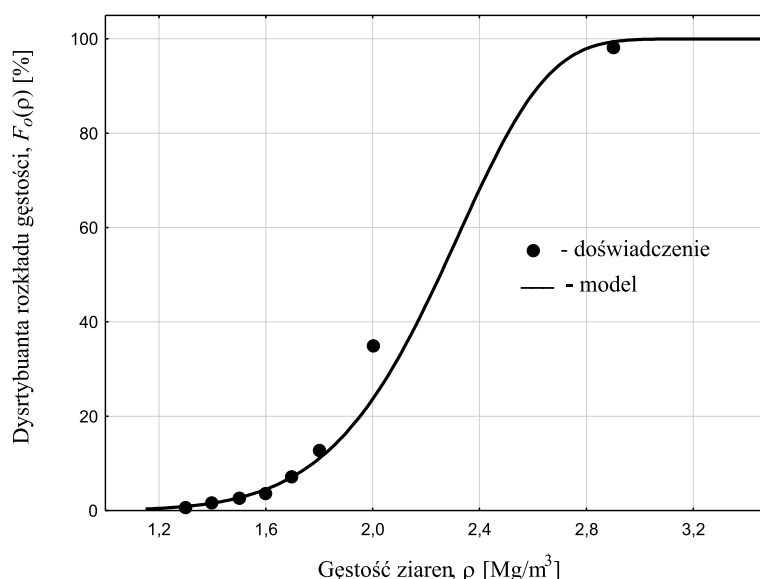
Rys. 3. Rozkład gęstości ziaren w klasie 8–10 mm,  $\rho_c = 2,17 \text{ Mg/m}^3$ ;  $k = 3,97$

Fig. 3. Particle density distribution for fraction 8–10 mm,  $\rho_c = 2.17 \text{ Mg/m}^3$ ;  $k = 3.97$



Rys. 4. Rozkład gęstości ziaren w klasie 16–20 mm,  $\rho_c = 2,25 \text{ Mg/m}^3$ ;  $k = 3,91$

Fig. 4. Particle density distribution for fraction 16–20 mm,  $\rho_c = 2.25 \text{ Mg/m}^3$ ;  $k = 3.91$



Rys. 5. Rozkład gęstości ziaren w odpadach klasy 8–10 mm,  $\rho_c = 2,36 \text{ Mg/m}^3$ ;  $k = 7,92$

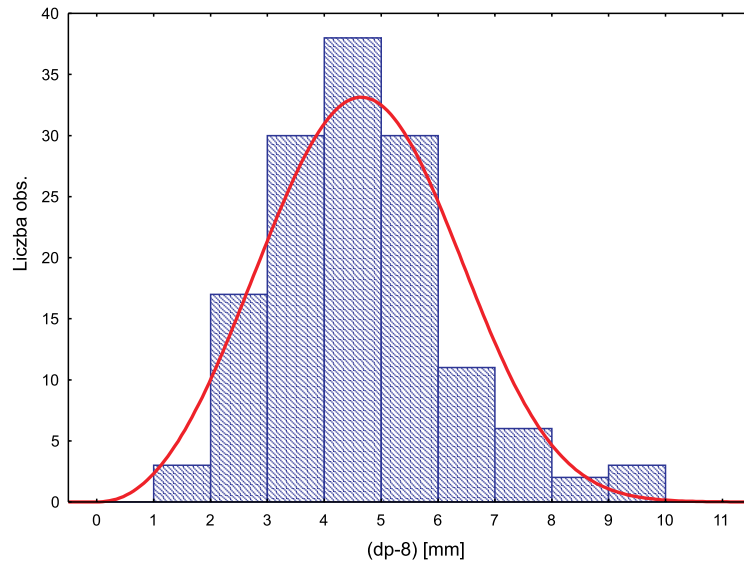
Fig. 5. Particle density distribution in tailings for fraction 8–10 mm,  $\rho_c = 2.36 \text{ Mg/m}^3$ ;  $k = 7.92$

parę parametrów  $\rho_c$  i  $k$ . Na rysunkach 1–5 podane są zależności modelowe z zaznaczonymi wartościami empirycznymi. Przy każdym rysunku podane są wartości parametrów rozkładu  $\rho_c$  i  $k$ . Zgodność modelu z doświadczeniem oszacowano wyliczając indeks korelacji krzywoliniowej. Wysokie wartości tego indeksu ( $R > 0,99$ ) świadczą o dobrej zgodności dystrybuanty modelowej (rozkładu Weibulla) z dystrybuantą empiryczną. Różnice w rozkładach gęstości poszczególnych klas ziarnowych są minimalne, co jest empirycznym potwierdzeniem założenia, że zmienne losowe wielkości ziarna i gęstości są zmiennymi niezależnymi.

Parametrami rozkładu prędkości opadania są współczynnik niejednorodności  $k$  i prędkość charakterystyczna  $v_{msc}$  wyliczana według wzoru (23). Występująca w tym wzorze gęstość cieczy  $\rho_o$  podawanej do komory osadzarki jest wyższa od gęstości wody i wynosi  $\rho_o = 1,093 \text{ Mg/m}^3$ , ponieważ woda zawracana jest do obiegu z osadnika Dorra.

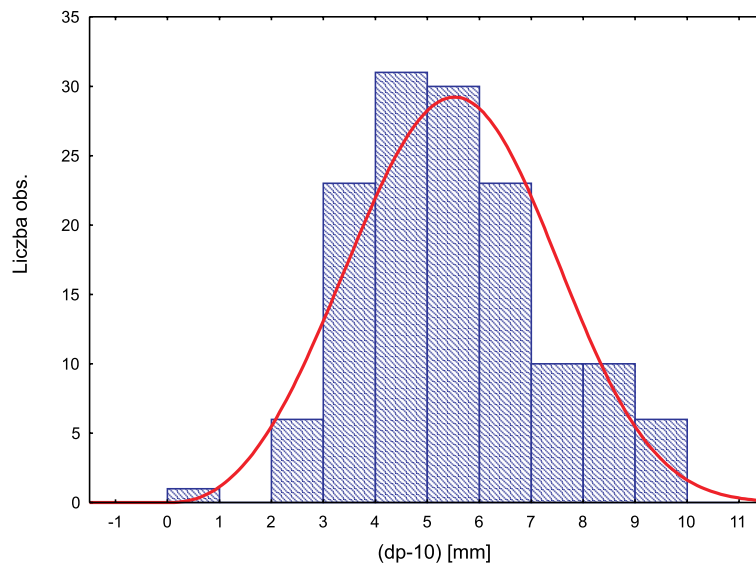
Za wielkość ziarna sferycznego przyjęto średnią wartość średnicy projekcyjnej ziarna w danej klasie ziarnowej wyznaczonej na podstawie pomiarów analiz obrazu i wykreślono histogramy rozkładu średnicy projekcyjnej dla czterech klasach ziarnowych. Przedstawiono je na rysunkach 6–9.

Za pomocą programu Statistica do każdego histogramu dopasowano funkcję gęstości rozkładu średnicy projekcyjnej w danej klasie ziarnowej. Najlepsze dopasowanie uzyskano dla rozkładu Weibulla w postaci:



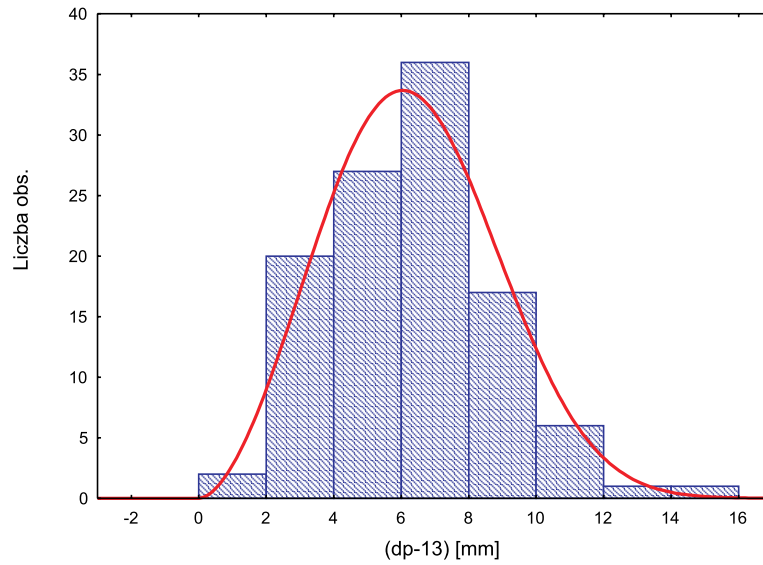
Rys. 6. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej  $d_p$  w klasie 8–10 mm  
 $d_{cp} = 13,2$  mm;  $k_p = 3,17$ ;  $b_p = 8$  mm;  $\bar{d}_p = 12,8$  mm

Fig. 6. Histogram of projective diameter  $d_p$  distribution in fraction 8–10 mm  
 $d_{cp} = 13.2$  mm;  $k_p = 3.17$ ;  $b_p = 8$  mm;  $\bar{d}_p = 12.8$  mm



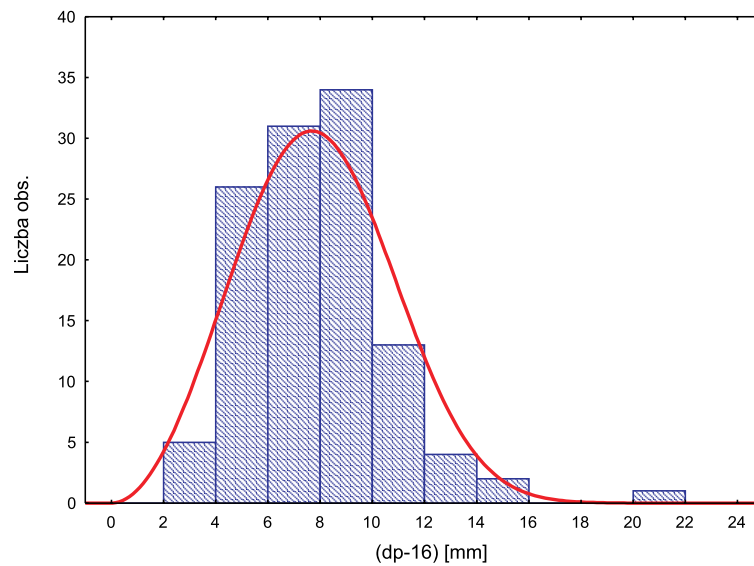
Rys. 7. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej  $d_p$  w klasie 10–12 mm  
 $d_{cp} = 16,12$  mm;  $k_p = 3,3$ ;  $b_p = 10$  mm;  $\bar{d}_p = 15,5$  mm

Fig. 7. Histogram of projective diameter  $d_p$  distribution in fraction 10–12 mm  
 $d_{cp} = 16.12$  mm;  $k_p = 3.3$ ;  $b_p = 10$  mm;  $\bar{d}_p = 15.5$  mm



Rys. 8. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej  $d_p$  w klasie 12–16 mm  
 $d_{cp} = 20,1$  mm;  $k_p = 2,73$ ;  $b_p = 13$  mm;  $\bar{d}_p = 19,3$  mm

Fig. 8. Histogram of projective diameter  $d_p$  distribution in fraction 10–12 mm  
 $d_{cp} = 16.12$  mm;  $k_p = 3.3$ ;  $b_p = 10$  mm;  $\bar{d}_p = 19.3$  mm



Rys. 9. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej  $d_p$  w klasie 16–20 mm  
 $d_{cp} = 24,79$  mm;  $k_p = 2,95$ ;  $b_p = 16$  mm;  $\bar{d}_p = 23,9$  mm

Fig. 9. Histogram of projective diameter  $d_p$  distribution in fraction 16–20 mm  
 $d_{cp} = 24.79$  mm;  $k_p = 2.95$ ;  $b_p = 16$  mm;  $\bar{d}_p = 23.9$  mm

$$g_p(d_p) = \frac{100k_p}{d_{cp}^{k_p}} d_p^{k_p-1} \exp \left[ - \left( \frac{d_p - b_p}{d_{cp} - b_p} \right)^{k_p} \right] \quad (25)$$

- ↪  $d_{cp}$  – wartość charakterystyczna średnicy projekcyjnej,  
 $k_p$  – współczynnik niejednorodności,  
 $b_p$  – wartość przesunięcia zmiennej losowej.

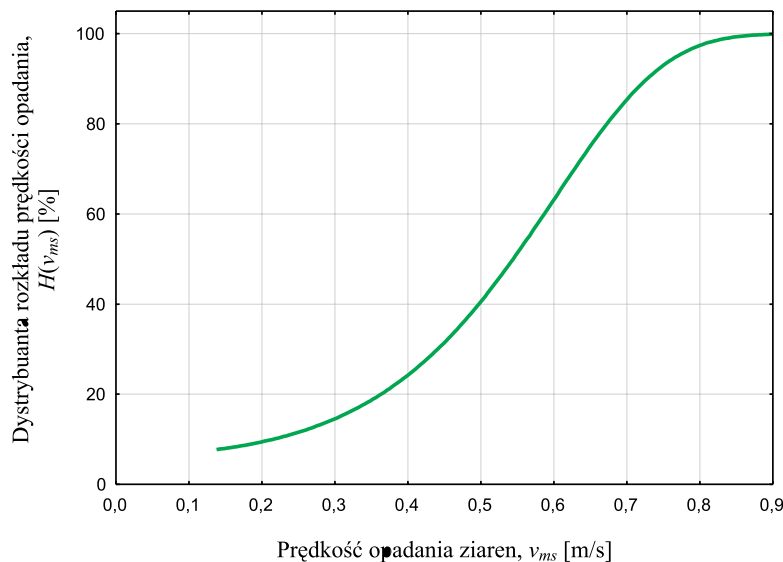
Jak wykazują pomiary innych autorów analogiczny typ rozkładu Weibulla stosuje się także do średnicy sitowej ziaren w wąskiej klasie ziarnowej (Kordek 1999).

Na rysunkach 6–9 podano parametry rozkładu Weibulla średnicy projekcyjnej wraz z wartością przesunięcia zmiennej losowej  $b_p$ . Wartość średnią średnicy projekcyjnej wylicza się z następującego wzoru (Gerstenkorn i Śródka 1972):

$$\bar{d}_p = d_{op} \Gamma \left( \frac{1}{k_p} + 1 \right) + b_p \quad (26)$$

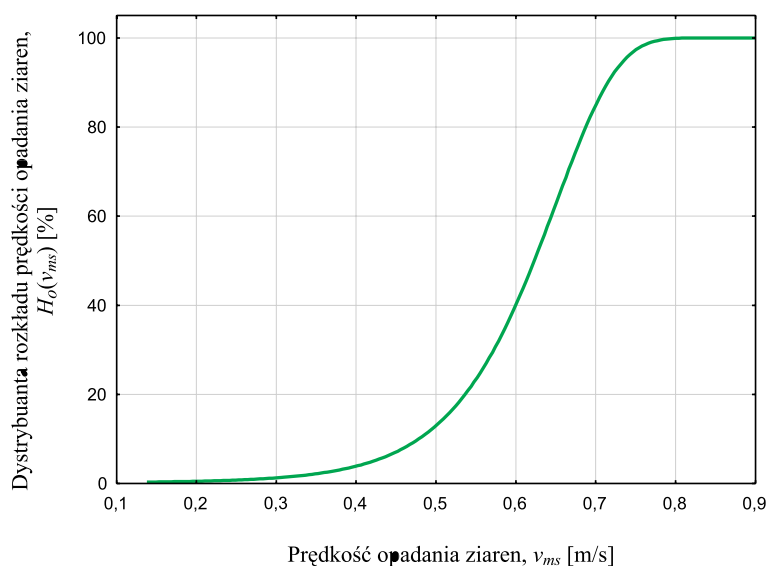
- ↪  $\Gamma$  – funkcja gamma Eulera.

Wartości średnie średnicy projekcyjnej podano przy każdym z rysunków 6–9.



Rys. 10. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren w monodispersyjnej próbce ziaren klasa 8–10 mm,  $v_{msc} = 0,599$  [m/s],  $k = 3,97$

Fig. 10. Particles settling velocity distribution function in monodisperse particles sample fraction 8–10 mm,  $v_{msc} = 0,599$  [m/s],  $k = 3,97$



Rys. 11. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren w odpadach monodispersyjnych klasa 8–10 mm,  $v_{msc} = 0,789$  [m/s],  $k = 7,92$

Fig. 11. Particles settling velocity distribution function in monodisperse tailings fraction 8–10 mm,  $v_{msc} = 0.789$  [m/s],  $k = 7.92$

Jak zauważono wcześniej za wielkość ziarna kulistego  $d_o$  przyjęto we wzorach (22) i (23) średnią wartość średnicy projekcyjnej. Ze względu na to, że różnice w rozkładach gęstości w poszczególnych klasach ziarnowych są nieznaczne, wyliczono rozkład prędkości opadania w jednej klasie ziarnowej 8–10 mm i w odpadach tej klasy. Na rysunkach 10 i 11 przedstawiono dystrybuantę rozkładu prędkości opadania w nadawie i odpadach monodispersyjnych ziaren sferycznych odpowiednio dla rozkładów gęstości zaprezentowanych na rysunkach 3 i 5.

Porównując parametry rozkładu prędkości opadania w wąskich klasach ziarnowych (rys. 10 i 11) można zauważyć, że dla nadawy prędkość charakterystyczna ziaren wynosi  $v_{msc} = 0,599$  m/s, a dla odpadów  $v_{msc} = 0,789$  m/s. Jest to spowodowane różnicą w rozkładach gęstości ziaren w tych wąskich klasach.

## Podsumowanie

1. Graniczna prędkość opadania swobodnego ziarna jest złożonym argumentem rozdziału w procesie wzbogacania surowców w osadzarce. Rozkład tego argumentu w próbce otrzymuje się na podstawie rozkładów argumentów prostych, tj. właściwości fizycznych i geometrycznych ziarna, którymi są gęstość ziarna i średnica ziarna oraz jego kształt.

2. Funkcja gęstości rozkładu granicznej prędkości opadania swobodnego jest w sposób jawny zależna od parametrów funkcji gęstości rozkładów gęstości i średnicy projekcyjnej. Dysponując rozkładami gęstości i średnicy ziarna można na podstawie algorytmu przedstawionego w pracy wyznaczyć rozkład granicznej prędkości opadania ziarna.
3. Zakładając, że prędkość opadania jest zmienną losową będącą funkcją zmiennych losowych właściwości fizycznych i geometrycznych ziarna i wykorzystując twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa odnoszące się do funkcji zmiennych losowych, można wyprowadzić ogólne wzory na funkcję gęstości rozkładu prędkości opadania swobodnego ziarna dla warunków ruchu turbulentnego, który występuje w procesach rozdzielczych np. przy wzbogacaniu w osadzarce.
4. W procesie wzbogacania w osadzarce istotnym jest, by nadawa nie zawierała ziaren równo opadających. Jak pokazano w artykule, nawet w materiale jednorodnym pod względem rozkładu cech granulometrycznych (wielkość i kształt), występują różnice w prędkościach opadania ziaren.

Artykuł opracowano w ramach działalności statutowej nr 11.11.100.276.

## LITERATURA

- Abraham, F.F. 1970. Functional dependence of drag coefficient of a sphere on Reynolds number. *Physics of Fluids* 13, s. 2194–2195.
- Akkerman, J.E. 1966. Free settling velocity of mineral particles in liquids. *Preparation of ores* 6, s. 22–25, (in Russian).
- Bedran i in. 1976 – Bedran, N.G., Denisenko, A.I and Pilov, P.I. 1976. Calculation of free settling velocity of mineral particles in liquid medium. *Journal of Mining* 9, s.141–144.
- Briens, C.L. 1991. Correlation for the direct calculation of the terminal velocity of spherical particles in newtonian and pseudoplastic (power-law) fluids. *Powder Technology* 67, s. 87–91.
- Brożek, M. 1995. The distribution of selected physical properties in the crushed material. *Archives of Mining Sciences* 40, s. 83–100.
- Brożek, M. and Surowiak, A. 2004. Distribution of settling velocity of particles in samples of mineral raw materials. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi – Mineral Resources Management* 20(3), s. 67–84.
- Brożek, M. and Surowiak, A. 2005a. The distribution of settling velocity of non-spherical mineral particles. *Acta Montanistica Slovaca* 10, s. 27–32.
- Brożek, M. i Surowiak, A. 2005b. The dependence of distribution of settling velocity of spherical particles on the distribution of particle sizes and densities. *Physicochemical Problems of Mineral Processing* 39, s. 199–210.
- Brożek, M. and Surowiak, A. 2010. Argument of separation at upgrading in the jig. *Archives of Mining Sciences* 55, s. 21–40.
- Christiansen, E.B. and Barker, D.E. 1965. The effect of shape and density on the free settling of particles at high Reynolds numbers. *American Institute of Chemical Engineers Journal* 11, s. 145–151.
- Concha, F. and Almendra, E.R. 1979. Settling velocities of particulate systems, 1, Settling velocities of individual spherical particles. *International Journal of Mineral Processing* 5, s. 349–367.
- Finkey, J. 1924. *Die wissenschaftlichen Grundlagen der nassen Erzaufbereitung*. Verlag Springer, Berlin (in Germany).
- Gerstenkorn, T. i Śródka, T. 1972. *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*. PWN, Warszawa.



- Heider, A. and Levenspiel, O. 1989. Drag coefficient and terminal velocity of spherical and non-spherical particles. *Powder Technology* 58, s. 63–70.
- Heiss, J.F. and Coull, J. 1952. On the settling velocity of non-isometric particles in a viscous medium. *Chemical Engineering Progress* 48, s. 133–140.
- Kordek, J. 1999. Analiza granulometryczna wąskich klas ziarnowych materiału przygotowanego na sitach analitycznych. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi – Mineral Resources Management* 15(z. spec.), s. 309–315.
- Lashtchenko, P.V. 1940. *Gravity concentration method*, Gostoptechizdat, Moskva (in Russian).
- Madhav, G.V. and Chhabra, R.P. 1994. Settling velocities of non-spherical particles in non-Newtonian polymer solutions. *Powder Technology* 78, 77–83.
- Madhav, G.V. and Chhabra, R.P. 1995. Drag on non-spherical particles in viscous fluids. *International Journal of Mineral Processing* 43, s. 15–29.
- Merinov, N.F. 2001. Theoretical aspects of gravity separation. *Journal of Mining* 4–5, s. 33–46.
- Nguyen-van, A. Schulze, H.J. and Kmet, S. 1994. A simple algorithm for the calculation of the terminal velocity of a single solid sphere in water. *International Journal of Mineral Processing* 41, s. 305–310.
- Nguyen-van, A. Stechemasser, H. Zobel, G. and Schulze, H.J. 1997. An improved formula for terminal velocity of rigid spheres. *International Journal of Mineral Processing* 50, s. 53–61.
- Niedoba, T. 2013a. Statistical analysis of the relationship between particle size and particle density of raw coal. *Physicochemical Problems of Mineral Processing* 49(1), s. 175–188.
- Niedoba, T. 2013b. Elementy metodologii stosowania dwu- i wielowymiarowych rozkładów właściwości materiałów uziarnionych do opisu wzbogacania węgla. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi – Mineral Resources Management* 29(2), s. 155–172.
- Olevskij, V.A. 1953. On free settling velocity of particles in liquid medium. *Papers of Mechanobr Institute*, s. 88–96 (in Russian).
- Saha i in. 1992 – Saha, G. Purohit, N.K. and Mitra, A.K. 1992. Spherical particle terminal settling velocity and drag in Bingham liquids. *International Journal of Mineral Processing* 36, s. 273–281.
- Surowiak, A. i Brożek, M. 2014. Methodology of calculation the terminal settling velocity distribution of spherical particles for high values of the Reynold's number. *Archives of Mining Sciences* 59. z. 1 (w druku).
- Sztaba, K. 2004. Influence of grain size upon falling velocity. *Physicochemical Problems of Mineral Processing* 38, s. 207–220.
- Tsakalakis, K.G. and Stamboltzis, G.A. 2001. Prediction of the settling velocity of irregularly shaped particles. *Minerals Engineering* 14, s. 349–357.
- Tumidajski, T. 1997. *Stochastyczna analiza własności materiałów uziarnionych i procesów ich rozdziału*. Wydawnictwa AGH, Kraków.

#### WPLYW ROZKŁADU GĘSTOŚCI ZIAREN NA ROZKŁAD ICH PRĘDKOŚCI OPADANIA DLA WĄSKICH KLAS ZIARNOWYCH

#### Słowa kluczowe

prędkość opadania, rozkład prędkości opadania, zmienne losowe, ziarna sferyczne

#### Streszczenie

Prędkość opadania ziaren jest cechą rozdziału, według której dokonuje się idealny rozdział ziaren w procesie wzbogacania w osadzarce. Uwzględnienie kompleksowych właściwości geometrycznych ziaren (wielkość i kształt ziaren) oraz fizycznych (gęstość ziaren) prowadzi do wyliczenia rozkładu granicznej prędkości opadania ziaren. Zatem graniczna prędkość opadania ziaren jest to złożona cecha

rozdziła, zawierająca w sobie trzy podstawowe cechy proste ziarna (gęstość, wielkość i kształt ziarna).

W artykule podano metodykę wyznaczania rozkładu prędkości opadania w próbce ziaren sferycznych dla turbulентnego charakteru ruchu ziaren, w którym prędkość opadania wyraża się wzorem Newtona-Rittingera. Ze względu na to, że zarówno gęstość jak i wielkość ziarna są zmiennymi losowymi o pewnych rozkładach, również prędkość opadania jako funkcja tych zmiennych jest zmienną losową. Korzystając z twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa odnoszących się do funkcji zmiennych losowych podano wzór na funkcję gęstości rozkładu prędkości opadania oraz wyliczono rozkłady prędkości dla kilku kombinacji rozkładów wielkości i gęstości ziarna na podstawie eksperymentu przemysłowego.

Artykuł przedstawia symulacyjne określanie rozkładów prędkości opadania ziaren sferycznych przy założeniu, że ziarna mają kształt kulisty o średnicy równej średnicy projekcyjnej ziaren nieregularnych. W takim przypadku, na graniczną prędkość opadania ziaren będzie miał wpływ rozkład właściwości densymetrycznych.

#### INFLUENCE OF PARTICLE DENSITY DISTRIBUTIONS OF THEIR SETTLING VELOCITY FOR NARROW SIZE FRACTIONS

#### Key words

particles settling velocity, distribution of settling velocity, random variables, spherical particles

#### Abstract

Particle settling velocity is the partition feature of feed directed to jiggling process. Distribution of terminal particles settling velocity characterizes feed for jiggling process. Consideration of complex geometrical properties of particles (size and shape) and physical ones (density) leads to calculation of distribution of terminal particles settling velocity. That means that this is complex partition feature containing three basic particle features (density, size and shape).

The paper presents the methodology of determining particle settling velocity distribution in sample of spherical particles for turbulent motion for which settling velocity is defined by Newton-Rittinger formula. Because of the fact that both particle density and size are random variables of certain type of distribution, settling velocity as function of these two variables is random variable too. Applying probability theorems connected with random variables functions the equation for statistical density function of settling velocity was given and distributions of velocities for several combinations of particle size and density were calculated on the basis of industrial velocity.

The paper presents simulative determination of spherical particles settling velocity distribution functions assuming that particles are spheres of diameter being equal to projective diameter of irregular particles. In this case, terminal settling velocity is influenced by distribution of densimetric characteristics.