W poszukiwaniu ukrytego porządku

Zjawiska losowe

KAZIMIERZ SOBCZYK
Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk, Warszawa
ksobcz@ippt.gov.pl

Rozpoznawanie i ilościowe charakteryzowanie zjawisk otaczającego nas świata nie może być pełne (a w wielu sytuacjach jest wprost niemożliwe) bez uwzględnienia roli losowości. Losowość zdarzeń i zjawisk niepokoiła ludzi od najdawniejszych czasów; jej tajemnicza istota była i ciągle jest przedmiotem zainteresowania filozofii i metodologii nauki, zaś tkwiące w niej regularności odkrywane są przez matematykę i nauki empiryczne

Różne formy przypadku znane są każdemu z codziennych doświadczeń. Przykładami mogą być np. wynik rzutu monetą czy kostką do gry, długość czasu oczekiwania w kolejce, przebieg zjawisk meteorologicznych. We wszystkich takich sytuacjach nie potrafimy przewidzieć wyniku doświadczenia czy przyszłego przebiegu procesu. Powodem trudności jest na ogół nasza niepełna informacja o wszystkich przyczynach interesującego zjawiska, ale może nią też być nieznany stopień dokładności danych empirycznych dotyczących jego przebiegu. Losowość może się też wiązać z nadmierną komplikacją (złożonością) zjawiska, uniemożliwiającą jego jednoznaczny opis deterministyczny. Tak jest, na przykład, w fizyce statystycznej, a dokładniej - w kinetycznej teorii gazów, której przedmiotem jest bardzo duża zbiorowość cząsteczek gazu (rzędu 10^{23} - licz-

Prof. Kazimierz Sobczyk, przewodniczący Rady Naukowej Instytutu Podstawowych Problemów Techniki i kierownik Zakładu Dynamiki Układów Złożonych prowadzi badania w dziedzinie dynamiki stochastycznej układów fizycznych i inżynieryjnych oraz teorii zastosowań stochastycznych równań różniczkowych

Earth Views

Jak można wykryć prawidłowości w rozchodzeniu się fal akustycznych w morzu obfitującym w ryby? Jakie prawa rządzą załamaniem fal, kiedy granica pomiędzy nimi jest wysoce nieregularna, o przypadkowej geometrii (jak to ma miejsce na burzliwej powierzchni morza)? Jest oczywiste, że pytania takie – a także odpowiedź na nie – mają istotne znaczenie praktyczne

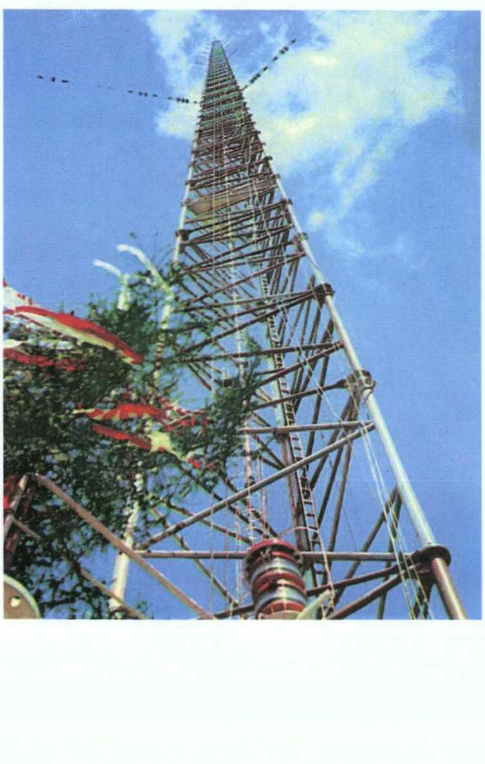
ba Avogadro) znajdujących się w ciągłym, bezładnym/chaotycznym ruchu i ulegających w ciągu każdej sekundy ogromnej liczbie wzajemnych zderzeń. I chociaż, zapisanie równań ruchu poszczególnych cząsteczek jest „teoretycznie możliwe", to - jak pisze I. Stewart - „wymagałoby papieru o powierzchni porównywalnej z powierzchnią obszaru ograniczonego przez orbitę Księżyca", a zatem myślenie o ich rozwiązaniu byłoby bezsensowne.

Nie jest całkowicie oczywiste, jaki rodzaj niepewności, czy niepełnej informacji o zjawisku należy uznać za losowość. Czy losowość rozpadu pierwiastka promieniotwórczego (uważana za istotę tego zjawiska) jest tego samego rodzaju co losowość falowania morskiego? Niezależnie jednak od trudności w rygorystycznym ustaleniu przyczyn i charakteru przypadku/losowości od dawna istniała silna potrzeba, aby - mimo iż zjawiska są losowe - starać się rozpoznawać tkwiące w nich prawidłowości, matematycznie je opisywać i ilościowo analizować. Czyni to teoria (lub rachunek) prawdopodobieństwa - ogromna i ciągle rozwijająca się dziedzina matematyki bardzo ściśle związana z różnorodnymi zastosowaniami.

Dwa pojęcia leżą u podstaw teorii prawdopodobieństwa: *zdarzenie losowe* i *prawdopodobieństwo*. Teoria prawdopodobieństwa definiuje te pojęcia, bada relacje między prawdopodobieństwami różnych zdarzeń losowych, określa kiedy zdarzenia są niezależne, wyprowadza reguły przekształcania prawdopodobieństw itp., itp. Inaczej - teoria prawdopodobieństwa konstruuje i analizuje ogólne modele zjawisk losowych, w których prawdopodobieństwo jest ilościową charakterystyką możliwości występowania określonych zdarzeń. Wychodząc od charakteryzowania zdarzeń „statycznych", teoria prawdopodobieństwa rozszerzyła swe metody na zjawiska losowe zależne od czasu (teoria procesów losowych/stochastycznych) i na zjawiska zmieniające się w przestrzeni oraz związane z obiektami geometrycznymi (teoria pól losowych, geometria stochastyczna).

Naturalne pytania, jakie się nasuwają, są następujące: w jaki sposób teoria prawdopodobieństwa i nauki empiryczne poszukują prawidłowości ukrytych w losowości? Na czym polega rozpoznawanie i wyjaśnianie zjawiska losowego? Co się rozumie przez przewidywanie/prognozę przyszłego przebiegu procesu losowego? I wreszcie, jaki rodzaj użytecznej informacji o zjawisku może dostarczyć analiza probabilistyczna (tj. z użyciem teorii prawdopodobieństwa)?

Pytania powyższe, aczkolwiek bardzo naturalne, nie są trywialne. Odpowiedź na nie wymaga wglądu w całą bogatą rozmaitość różnych przejawów losowości w zjawiskach przyrodniczych, technicznych, ekonomicznych itp. oraz w dość zaawansowany matematyczny język teorii prawdopodobieństwa. Aby jednak rzucić pierwsze promienie światła na wskazane wyżej problemy, rozpatrzymy dwa przykłady.



wikipedia.pl

Rozwinięta w ostatnich latach dziedzina dynamiki stochastycznej pozwoliła na wypracowanie metod rozwiązywania równań dynamicznych z włączeniem elementów przypadkowych. Umożliwia to określenie reakcji wielu układów rzeczywistych na obciążenia o charakterze przypadkowym, którym poddawane są liczne budowle. Przykładem jest widoczny na zdjęciu maszt radiowy Programu 1 Polskiego Radia w Konstantynowie, swego czasu najwyższa tego typu struktura na świecie

Fale stochastyczne

Rozważmy znane każdemu z codziennych obserwacji (i edukacji szkolnej) zjawisko ruchu falowego. Ogólnie, fale - to zaburzenia ośrodka materialnego rozchodzące się w przestrzeni ze skończoną prędkością i przenoszące energię i informację. W języku matematyki fale opisuje się przez funkcje zależne od zmiennej przestrzennej (tj. punktu przestrzeni *r*) i czasu *t*. Jeżeli zależność czasowa owych zaburzeń jest „ustalona" - jest np. okresowa lub, jak mówimy, harmoniczna - to wtedy interesuje nas tylko zależność zaburzeń od zmiennej przestrzennej, a dokładniej - od komplikacji własności ośrodka, w którym fala rozprzestrzenia się.

Wspólną cechą klasycznej analizy fal (a zatem również tej znanej nam ze szko-

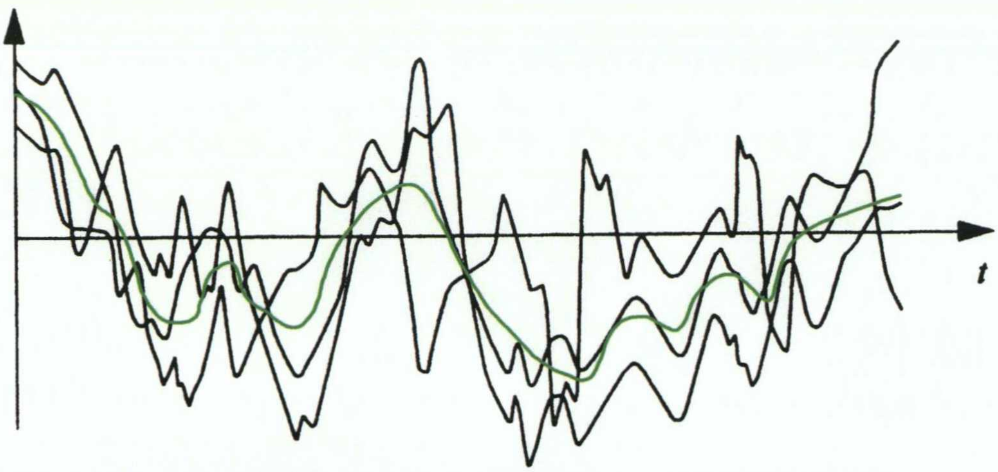
Krzysztof Miller/Agencja Gazeta

Maszt radiowy o wysokości 646,38 m rozpoczął pracę w 1974. Rozpoczęta w 1991 konserwacja naruszyła stabilność rdzenia masztu radiowego, który zawalił się 8 sierpnia 1991. Emisję Programu 1 Polskiego Radia przejęły dwa maszty radiowe w Solcu Kujawskim koło Bydgoszczy, o wysokości zaledwie 330 i 289 m

ły, a także ze studiów uniwersyteckich) jest to, że przyjęty do opisu model matematyczny ruchu falowego (np. równania akustyki, radiofizyki) jest deterministyczny. Dokładniej, że ośrodek, w którym rozchodzi się fala, jest *idealny*, tj. jego parametry są niezmienne (por. *stała* dielektryczna, przenikalność magnetyczna *stała* i, oczywiście *stała* w całym ośrodku jego gęstość); idealne kształty mają też przeszkody, które fala spotyka na swej drodze; przypomnijmy sobie ze szkoły prawo Snelliusa dotyczące odbijania się fali od granicy między dwoma różnymi ośrodkami (oczywiście, owa granica była płaszczyzną [!], toteż i prawo było proste). Okazuje się, że w bardzo wielu sytuacjach rzeczywistość nie jest taka idealna. Wskutek istnienia wielu różnorodnych i przypadkowych czynników determinujących realne ruchy falowe należało poszukiwać innych matematycznych opisów. Jak opisać i analizować przechodzenie fali przez turbulentną atmosferę (z silnymi przestrzennymi fluktuacjami ciśnienia, gęstości ośrodka, własności magnetycznych itp.)? Jak rozpoznawać możliwe prawidłowości w rozchodzeniu się fali akustycznej w morzu wypełnionym rybami? Wreszcie, jakie prawa rządzą „odbijaniem" się fali na granicy dwóch ośrodków, jeżeli granica ta jest nierówna, wysoce nieregularna, o zmiennej losowej geometrii (np. burzliwa powierzchnia morza)? Jakie są prawidłowości przechodzenia zaburzenia sejsmicznego przez wysoce niejednorodną skorupę ziemską? Nie ma potrzeby podkreślać, że powyższe pytania (i odpowiedzi na nie) są bardzo ważne ze względów praktycznych. Mamy jednak nadzieję, iż czytelnik rozpozna w nich też ukryte piękno, jakie odsłania się przed badaczem, gdy odkrywa podstawowe zależności i wypowiada je w języku matematyki.

Komplikacja rzeczywistych procesów falowych jest przede wszystkim wynikiem losowej niejednorodności i nieoznaczoności struktury większości ośrodków przenoszących fale oraz przypadkowych nierówności powierzchni rozdzielających obszary o różnych własnościach. Nieregularność i złożoność własności wielu ośrodków rzeczywistych (np. turbulentna atmosfera, skorupa ziemska, materiały kompozytowe) nie poddaje się opisowi w terminach zwykłych „deterministycznych" obiektów matematycznych i dlatego język teorii prawdopodobieństwa staje się niezbędny; w istocie jest to język teorii pól losowych (tj. funkcji losowych wielu zmiennych). Do badania tych zjawisk wprowadzamy funkcję losową Φ (r, γ) zmiennej przestrzennej r w celu opisania losowej niejednorodności ośrodka, lub losowej nierówności powierzchni (γ oznacza tzw. zdarzenie elementarne); jej podstawowe charakterystyki muszą być wyznaczone na podstawie danych empirycznych.

Podstawowym zjawiskiem fizycznym, które w opisywanej sytuacji jest przedmiotem zainteresowania badacza, jest zjawisko *rozpraszania* fali na „niejednorodnościach" ośrodka. Fala pierwotna (padająca), dochodząc do punktów ośrodka o innych własnościach niż otoczenie, staje się źródłem

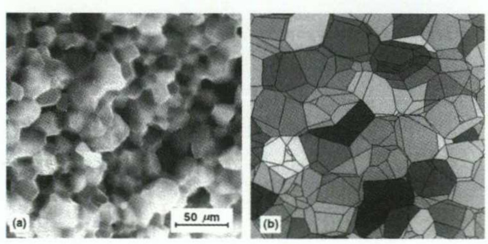


K. Sobczyk

Wiatr a budowle

Jak opisać wiatr? Zamiast funkcji *V(t)* znanej ze szkoły, dla scharakteryzowania prędkości chwilowej wiatru wprowadzamy funkcję losową *V(t, γ)*, która zależy nie tylko od czasu *t*, ale także od przypadku (*γ* symbolizuje tzw. zdarzenie elementarne). Taka funkcja jest w istocie rodziną (zbiorem) różnych możliwych realizacji - tj.: deterministycznych prędkości *v(t)*, które mogą zaistnieć. Podstawowe informacje o tej funkcji losowej czerpiemy z obserwacji i pomiarów opracowywanych metodami statystyki. Najprostszą charakterystyką funkcji *V(t, γ)* jest jej wartość przeciętna (oznaczana często $m_V(t)$) opisująca uśredniony po wszystkich możliwych realizacjach przebieg prędkości. Oczywiście, reakcja konstrukcji (przemieszczenie, naprężenie w ustalonym punkcie) jest również losowa (częściej mówimy: stochastyczna) i charakteryzuje się ją innym procesem losowym *Y(t, γ)*. Znając podstawowe charakterystyki reakcji konstrukcji, tj. procesu *Y(t, γ)*, możemy oszacować prawdopodobieństwo uszkodzeń i trwałości konstrukcji. Nie ma potrzeby wykazywać, jak ważna jest to informacja dla praktyki inżynierskiej!

nowych fal - fal rozproszonych. Te nakładają się na falę pierwotną i powodują losowe fluktuacje pola sumarycznego (fluktuacje fazy, amplitudy itp.); w rezultacie obserwuje się tłumienie fali (zanikanie amplitudy), jej opóźnienie, depolaryzację i wiele innych zjawisk. Ilościowa charakteryzacja tych zjawisk jest celem analizy fal stochastycznych. Oczywiście, ze względu na trudności, analiza fal stochastycznych opiera się na wielu hipotezach fizycznych i założeniach matematycznych weryfikowanych następnie empirycznie. Jedno z założeń, które pozwala przeprowadzić efektywną analizę, polega na wprowadzeniu (do matematycznego modelu) parametru określającego stosunek długości fali do rozmiaru (skali) losowych niejednorodności przestrzennych. Analiza fal stochastycznych jest dzisiaj dziedziną nie tylko dość zaawansowaną teoretycznie, ale także okazała się wielce użyteczna w takich dziedzinach jak radiofizyka, geofizyka, astrofizyka czy akustyka.



K. Sobczyk

Rzeczywista mikrostruktura aluminium Al2O3 oraz jej symulacyjny model w oparciu o losową tesselację

Mikrostruktury losowe

Gdy weźmiemy do ręki kawałek metalu (np. stali) i popatrzymy na niego uważnie, to - jeśli przeszedł on właściwą obróbkę powierzchniową - nie mamy wątpliwości, że jest to materiał bardzo *jednorodny* i uznajemy jako rzecz naturalną, że tak właśnie ów metal traktowany jest w podstawowych książkach dotyczących mechaniki i wytrzymałości materiałów. Istotnie, przez długi czas, kiedy chodziło o charakteryzowanie globalnych, makroskopowych własności materiału, nie interesowano się jego wewnętrzną strukturą. Gdy jednak chcemy głębiej poznać fizyczne podstawy budowy różnych materiałów używanych w technologii (np. w technologii elektronicznej), to ważne staje się rozpoznawanie ich mikrostruktury, tj. ich morfologii na poziomie mikroskopowym (jak mówimy - w skalach dużo mniejszych niż skala naszych bezpośrednich zmysłowych obserwacji). Dzisiaj wiadomo dobrze, że owe makroskopowo jednorodne metale mają bardzo skomplikowaną mikrostrukturę; że są to ciała polikrystaliczne, będące agregatami ogromnej liczby anizotropowych kryształów, których osie (krystalograficzne) są losowo ukierunkowane w przestrzeni. Badacze z zakresu inżynierii materiałowej poświęcają dużo wysiłku, aby rozpoznać mikrostruktury ziaren metalurgicznych generowane w procesie wytwarzania metalu. Zdjęcia wizualizujące owe mikrostruktury pokazują ich przestrzenną złożoność i losowość.

Wyłonił się więc ważny dla nauki i zastosowań problem: jak matematycznie charakteryzować obserwowane empirycznie skomplikowane i losowe mikrostruktury materialne i jak wykorzystać możliwe ich modele do analizy zjawisk zachodzących w materiałach na poziomie mikroskopowym? I tutaj znów przychodzi z pomocą teoria prawdopodobieństwa, a dokładniej - jej nowa gałąź: geometria stochastyczna, badająca rozmaite obiekty i struktury geometryczne o losowych własnościach. Jedną z takich wielce interesujących struktur są tesselacje (lub mozaiki) losowe. Jest to rodzina (zbiór) przylegających do siebie losowych wielościanów wypełniających przestrzeń. Wielościany (a na płaszczyźnie - wieloboki) są losowe, bo mają różną i losową liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian, a także mają losowe objętości. I chociaż owe tesselacje pojawiły się w czystej matematyce już dawno (G.L. Dirichlet - 1850 r., G.Voronoi - 1908 r.), to dopiero zastosowania sprawiły, iż są one teraz przedmiotem zainteresowania bardzo wielu badaczy. Okazało się bowiem, że mogą one służyć jako dość adekwatne modele wielu rzeczywistych losowych struktur komórkowych - w tym także mikrostruktury ziarnistej metali i ceramik. Gdy taki tesselacyjny model zostanie skonstruowany dla badanej mikrostruktury metalicznej, a jego parametry - powiązane z danymi empirycznymi, można wtedy określać dla takiego modelu deformacje i naprężenia, które z kolei są konieczne do charakteryzowania takich np. zjawisk jak inicjacja pękania materiału. To zjawisko ma oczywiście charakter losowy, toteż przewidywanie jego wystąpienia wyrażamy w terminach prawdopodobieństwa.

Nie jest łatwo skonstruować ogólny model dla takiego zjawiska jak pękanie, który uwzględniałby skomplikowaną mikrostrukturę i jej losowość. Mechanizmy pękania na poziomie mikroskopowym nie są jeszcze całkowicie rozpoznane. I chociaż pole naprężeń w materiale - podobnie jak w mechanice makroskopowej - jest tutaj także podstawową siłą sprawczą, to w mikromechanice pękania jest ono mocno komplikowane przez złożoność mikrostruktury, tj. przez jej wielką przestrzenną zmienność i losowość, przy czym często jest to zmienność hierarchiczna manifestująca się w zależności naprężenia od własności ośrodka na różnych skalach przestrzennych. Nie ulega wątpliwości, że naszkicowana tu problematyka badania zjawisk w mikrostrukturach losowych (także w mikrostrukturach biologicznych) należy do wyzwań współczesnej matematyki stosowanej, nauki o materiałach, mechaniki, a także, w jakimś sensie, do ogólnej nauki o złożoności (ang. *complexity science*). Autor niniejszego eseju jest rad, iż może w tych wyzwaniach aktywnie uczestniczyć. ■

Chcesz wiedzieć więcej?

Sobczyk K. (1973). *Metody Dynamiki Statystycznej.* Warszawa: PWN.

Sobczyk K. (1985). *Stochastic Wave Propagation.* Amsterdam: Elsevier.

Sobczyk K., Spencer B.F. (1992). *Random Fatigue: From Data to Theory.* Boston: Academic Press.

Sobczyk K., Kirkner D.B. (2002). *Stochastic Modelling of Microstructures.* Boston: Birkhauser.

Sobczyk K. (2003). Reconstruction of random material microstructures: patterns of maximum entropy. *Probabilistic Eng. Mechanics (Elsevier)*, 18, 279-287.

Siły napięć i obciążeń działających na wiele konstrukcji technologicznych mają często nieregularny charakter i pojawiają się w sposób przypadkowy. Dotyczy to nie tylko pokazanych na zdjęciu budynków zaatakowanych przez tornado, ale także wysokich anten radiowych i telewizyjnych, a także morskich platform wiertniczych. Obciążenia i napięcia platform wywołane uderzeniami wiatru i fal morskich rozwijają się w czasie w sposób niezwykle skomplikowany, i do ich opisu nie nadają się tradycyjne metody (np. przy użyciu funkcji okresowych)

NOAA Photo Library