Jak zmniejszać ryzyko inwestycji finansowych?

Ryzyko na rynku

Prof. dr hab. Łukasz Stettner jest matematykiem, zajmuje się sterowaniem stochastycznym i matematyką finansową

ŁUKASZ STETTNER
Instytut Matematyczny PAN
Akademia Finansów
stettner@impan.gov.pl

Działalność człowieka jest nieuchronnie związana z ryzykiem. Chcielibyśmy umieć je mierzyć, szacować, a może nawet zmniejszać

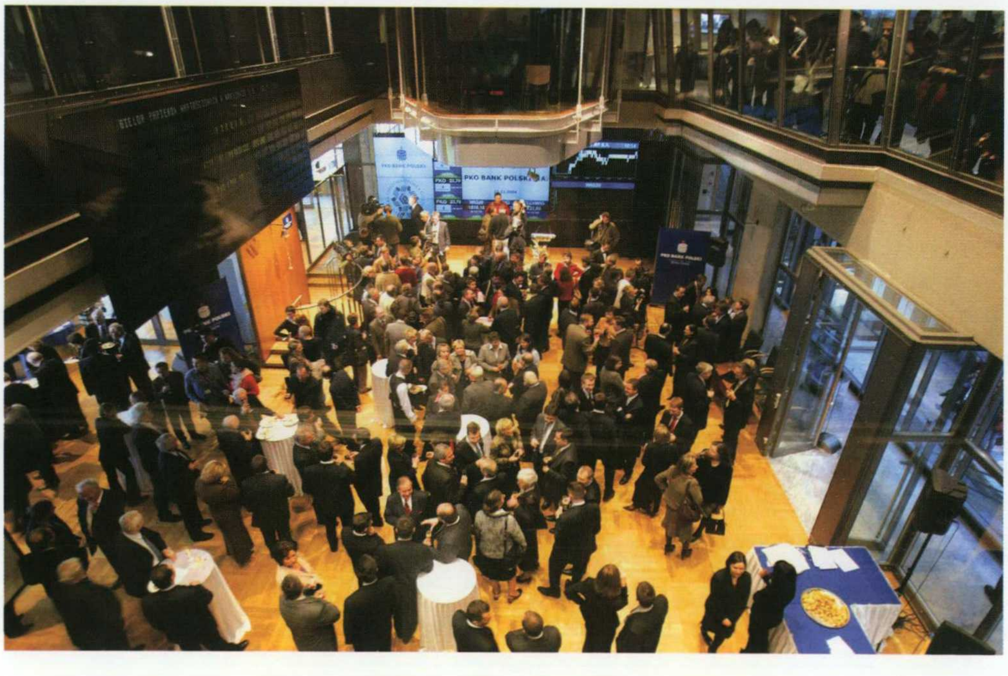
Kiedy w 1952 roku Harry Markowitz zaproponował pomiar ryzyka w inwestycjach finansowych mierzony wariancją wartości portfela (czyli średniokwadratowego odchylenia wartości portfela od jego wartości oczekiwanej), wzbudził w środowisku ekonomistów mieszane odczucia. Dla nich była to teoretyczna praca matematyczna. Dla matematyków z kolei było to zagadnienie z zakresu programowania liniowego z kwadratowymi ograniczeniami, które już wtedy należało do standardowych. Mimo to praca, która matematycznie nie wniosła nic nowego, jest do dziś podstawowym narzędziem finansistów.

Genialność pomysłu Markowitza polegała na złamaniu wcześniejszych kanonów i na uwzględnieniu w zagadnieniach finansowych ryzyka, rozumianego jako odchylenie średniokwadratowe wartości portfela od wartości oczekiwanej. Był to prosty pomysł, ale rzeczy proste stają się takie dopiero, gdy ktoś je zauważy.

Nie ulega wątpliwości, że instytucje finansowe „dorastały" do potrzeby zmierzenia się z ryzykiem. Pogoń za jak największymi profitami często prowadziła do niepożądanych sytuacji. Dlatego mimo początkowych oporów metodologia Markowitza zawładnęła rynkami finansowymi od końca lat 50.

Modelowanie ryzyka

Ryzyko kojarzy się nam z chaosem, z nieoczekiwanym i niechcianym zachowaniem się obserwowanego zjawiska. Trudno jest przewidzieć, jak zachowa się chaotyczny model, bo - jak z samej nazwy wynika - nie ma on prognozowalnej dynamiki. Ale o ile trudno jest określić, jak proces chaotyczny zachowa się w danej chwili, zupełnie inaczej sytuacja przedstawia się w dłuższej per-



Bartosz Bobkowski, Agencja Gazeta

O powodzeniu w inwestycjach giełdowych często decyduje znajomość wyrafinowanych metod matematycznych

Rafał Guz/Fotorzepa

Budynek Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie

spektywie. Tu interesuje nas głównie wartość uśredniona pewnych funkcji, zależnych od tego procesu. Inwestorzy w banku czy firmie ubezpieczeniowej bardziej interesują się sumaryczną sytuacją na rynku niż pojedynczymi transakcjami, na których można stracić. Chodzi im o to, by po odpowiednio długim czasie być na „plusie".

Podejście do ryzyka wymaga posługiwania się pewnym językiem (modelem matematycznym), opisującym obserwowane zjawisko. I tak fluktuacje w czasie ciągłym opisujemy procesem ruchu Browna. Charakteryzuje się on ciągłymi trajektoriami i niezależnymi przyrostami, które mają rozkład normalny z zerową wartością oczekiwaną i wariancją równą rozpatrywanemu przyrostowi czasu. Rezygnacja z ciągłych trajektorii z założeniem przyrostów niezależnych i stacjonarnych (zależnych jedynie od różnicy między mierzonymi momentami) prowadzi do ogólniejszej klasy procesów, tzw. procesów Levy'ego.

W modelowaniu matematycznym stosujemy dwa podejścia: statyczne i dynamiczne. Podejście statyczne opiera się na postulacie, że model nie zmienia się szybko (o ile w ogóle się zmienia). Liczymy, że na podstawie danych historycznych możemy przewidzieć jego zachowanie się w następnej chwili. Jest to ważne ograniczenie, które istotnie upraszcza badanie modelu.

W poszukiwaniu optymalnego portfela

Klasyczne podejście Markowitza polegało na znalezieniu portfela inwestycyjnego, tj. proporcji, według której inwestujemy kapitał w poszczególne akcje tak, by przy ustalonym poziomie ryzyka (wartości wariancji) zmaksymalizować stopę zwrotu portfela w następnej chwili. Para „optymalny zwrot - ryzyko" tworzy tzw. brzeg efektywny, na którym chcemy się znaleźć.

Ten matematyczny problem daje się rozwiązać dzięki oszacowaniu, np. z danych historycznych, macierzy kowariancji między akcjami i oczekiwanych stóp zwrotu poszczególnych akcji. Sprowadza się to do dosyć standardowego zadania matematycznego. Problem stanowi praktyczne stosowanie tej metody. O ile można dobrze wyestymować macierz kowariancji, to już estymacja oczekiwanych stóp zwrotu akcji jest bardzo niestabilna i trudna. Pewnym ratunkiem jest wprowadzona przez Blacka i Littermana w latach 90. XX wieku modyfikacja, polegająca na prognozie oczekiwanych stóp zwrotu z uwzględnieniem opinii ekspertów. Stało się to podstawowym narzędziem matematycznym, stosowanym w analizie inwestycji finansowych.

Należy się jednak zastanowić, czy wariancja jest „właściwą" miarą ryzyka. Nadaje ona tę samą miarę pozytywnym dla nas fluktuacjom oraz negatywnym, gdy wartość portfela spada poniżej wartości oczekiwanej. Pojawiła się więc koncepcja mierzenia tylko negatywnych efektów w postaci semiwariancji, która jest jednak trudniejsza do badania z matematycznego punktu widzenia.

W środowisku bankowców króluje pojęcie *value at risk* (VaR), czyli wartości narażonej na ryzyko jako miary ryzyka. Jest to największa strata, jaką można ponieść przy ustalonym z góry prawdopodobieństwie, nazywanym poziomem ufności. *Value at risk* ma szereg niedogodności, związanych nie tylko z trudnościami obliczeniowymi. Przede wszystkim mierzy ona nie wartość strat portfela, ale ich prawdopodobieństwo. Tej wady nie ma tzw. warunkowy VaR, który jest warunkową wartością oczekiwaną straty portfela przy warunku, że ta strata jest mniejsza od VaR-a.

Jakie postulaty powinna spełniać właściwa miara ryzyka? Przede wszystkim powinna być monotoniczna - większe inwestycje są obciążone mniejszym ryzykiem. Zwiększenie inwestycji o stałą deterministyczną zmniejsza ryzyko o tę stałą. Ryzyko sumy inwestycji jest mniejsze od sum ryzyka poszczególnych inwestycji. Wielkość portfela nie ma wpływu na oszacowanie ryzyka. Ryzyko portfela złożonego z wielokrotności tych samych instrumentów jest równe wielokrotności ryzyka portfela złożonego z tych elementów.

Te i inne postulaty prowadzą do definicji miar ryzyka, które są uważane za wzorcowe. Nie wszystkie miary ryzyka je spełniają. Wariancja i semiwariancja mają raczej charakter miar odchylenia. Niemniej jednak w lepszy lub gorszy sposób mierzą one niekorzystne sytuacje, skłaniając inwestorów do mniej ryzykownego postępowania.

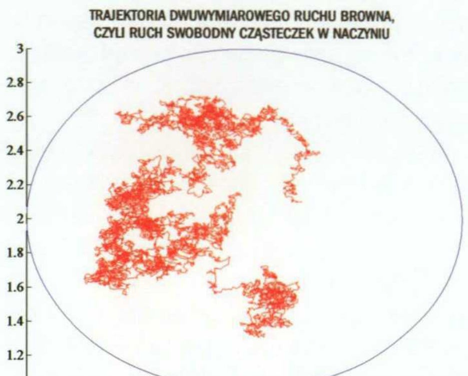
Inwestować optymalnie

Zagadnienie optymalnego inwestowania z uwzględnieniem ryzyka jako ograniczenia prowadzi do problemu dwukryterialnego: z jednej strony maksymalizujemy stopę zwrotu portfela, a z drugiej - chcemy utrzymać ryzyko na możliwie najniższym poziomie. Tego typu zagadnienia, polegające na łącznej maksymalizacji jednego funkcjonału i minimalizacji drugiego, są zwane minimaksowymi i z natury są trudne do rozwiązania. Niejaką alternatywą są tutaj funkcjonały wrażliwe na ryzyko, które, mierząc stopę zwrotu portfela, uwzględniają równocześnie z pewną ustaloną wagą ryzyko.

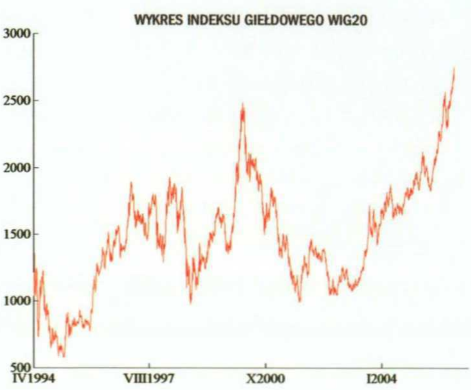
W takich wypadkach problem optymalizacji sprowadza się do jednego funkcjonału, co jest istotnym uproszczeniem, ale zwykle trudno jest znaleźć optymalne rozwiązanie problemu w postaci analitycznej. W praktyce jest to do pokonania dzięki metodzie Monte Carlo, wprowadzonej w 1949 roku przez amerykańsko-węgierskiego matematyka Johna von Neumanna i polskiego matematyka Stanisława Marcina Ulama, pracujących nad pierwszymi maszynami liczącymi w Los Alamos, notabene uczestniczących tam też w pracach nad amerykańskim programem nuklearnym.

Modelowanie fluktuacji w czasie ciągłym za pomocą ruchu Browna czy też ogólniej procesu Levy'ego daje podstawy do analizy złożonych zjawisk zmieniających się w czasie. Dzięki temu możemy rozwijać modelowanie dynamiczne, które jest alternatywą dla modelowania statycznego. W ten sposób możemy opisywać zmieniające się ceny akcji, zakładając, że są one rozwiązaniem pewnego stochastycznego równania różniczkowego. Poważnym problemem staje się jednak znalezienie właściwych współczynników tego równania, czyli tzw. kalibracja modelu.

W 1827 roku angielski botanik Robert Brown zaobserwował chaotyczny ruch pyłków kwiatowych w cieczy. Ten proces stochastyczny opisał w sposób matematyczny w 1923 roku Norbert Wiener. Dziś służy on m.in. do opisu zachowania rynków finansowych



Grzegorz Hałaj



Grzegorz Hałaj

Inwestorzy bardziej interesują się sumaryczną sytuacją na rynku niż pojedynczymi transakcjami, na których można stracić. Chodzi o to, by w długiej perspektywie być na „plusie". Dlatego pilnie śledzą indeksy giełdowe

Wyeliminować ryzyko?

Do tej pory skupialiśmy się na mierzeniu ryzyka. Ale działalność człowieka w sposób naturalny zmierza do eliminacji ryzyka, nawet gdy mamy problem z jego oszacowaniem.

Przykładem instrumentu finansowego, którego zadaniem jest zmniejszanie ryzyka, są opcje. Załóżmy, że planujemy wyjazd na wakacje do strefy dolarowej za pięć miesięcy. Na wyjazd potrzebujemy 3 tys. dol. Zakup takiej ilości waluty już teraz jest przedwczesny. Z drugiej strony obawiamy się, że kurs dolara (dziś np. 1 dol. = 2,75 zł) może zmienić się w niekorzystny dla nas sposób. Co robimy? Po prostu kupujemy opcję kupna 3 tys.

dolarów z jednostkową kwotą zakupu dolara, np. 1 dol. = 2,8 zł z pięciomiesięcznym terminem realizacji. Za tę opcję zapłacimy pewną kwotę, np. 100 zł, ale zagwarantuje nam ona zakup dolarów tuż przed wyjazdem według przelicznika 1 dol. = 2,8 zł. Jeżeli przed wyjazdem stwierdzimy, że kurs 1 dol. jest niższy niż 2,8 zł, nie skorzystamy z opcji, kupując dolary po aktualnej cenie. Mamy jednak pewność, że gdy kurs będzie większy niż owe 2,8, w myśl umowy opcyjnej dolary kupimy po 2,8 zł. W ten sposób, wydając pięć miesięcy przed wyjazdem 100 zł, zagwarantujemy sobie kupno dolarów tuż przez wyjazdem pozbawione ryzyka kursowego. Pojawia się tu pytanie o wycenę opcji, czyli czy 100 zł to właściwa cena za tę usługę.

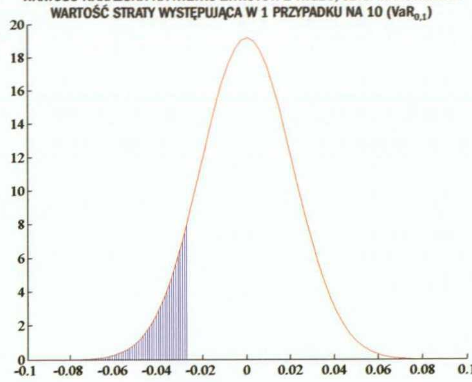
Pytanie to jest nawet bardziej istotne dla firmy sprzedającej opcje. Chciałaby ona wiedzieć, jaka jest minimalna i ekonomicznie dla niej akceptowalna cena opcji, którą nazwiemy uczciwą ceną. Jest to jeden z fundamentalnych problemów matematyki finansowej. Analityczny wzór na uczciwą cenę opcji, uzyskany przy pewnych upraszczających założeniach między innymi zakładających logarytmiczno-normalne stopy zwrotu - przez Blacka i Scholesa w 1973 roku, stał się podstawowym narzędziem stosowanym przez instytucje finansowe. Choć później zauważono, że stosowany w nim model cen akcji czy kursów walutowych jest zbyt dużym uproszczeniem istniejącej rzeczywistości, to właśnie fakt, że wszyscy stosują tę metodę (który wynika z jej prostoty), doprowadził do jej „urealnienia".

Rodzaje ryzyka

Opisywane powyżej przykłady ryzyka dotyczyły ryzyka finansowego związanego z rynkiem. Mamy wiele rodzajów ryzyka. Gdy jedna ze stron kontraktu może nie wywiązywać się ze swoich zobowiązań, mówimy o ryzyku kredytowym. Utrata zdolności do terminowego regulowania zobowiązań wiąże się z ryzykiem płynności. Ryzyko wynikające z błędów w działalności operacyjnej firmy to ryzyko operacyjne. Możemy mówić o ryzyku zmian prawnych, politycznych, ryzyku katastrof i tak dalej. Poważna część z tych ryzyk daje się modelować i mierzyć za pomocą metod matematycznych w oparciu o statystykę i szeroko rozumianą stosowaną probabilistykę. Rozwój współczesnych technik komputerowych sprawia, że wiele modeli

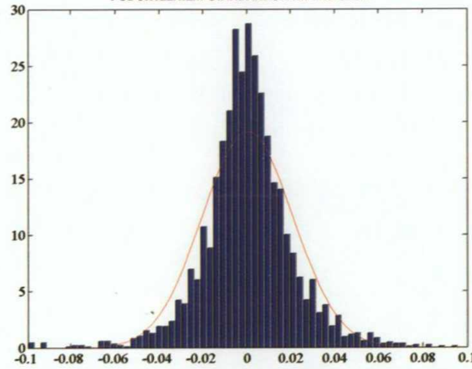
Grzegorz Hałaj

WARTOŚĆ NARAŻONA NA RYZYKO ZWROTÓW Z WIG20, CZYLI MAKSYMALNA WARTOŚĆ STRATY WYSTĘPUJĄCA W 1 PRZYPADKU NA 10 ($VaR_{0,1}$)



Grzegorz Hałaj

DZIENNE ZWROTY Z WIG20 (SŁUPKI) I ROZKŁAD NORMALNY ZE ŚREDNIĄ I ODCHYLENIEM STANDARDOWYM ZWROTÓW



W środowisku króluje pojęcie *value at risk* (VaR), czyli wartości narażonej na ryzyko jako miary ryzyka. Jest to największa strata, jaką można ponieść przy ustalonym z góry prawdopodobieństwie, nazywanym poziomem ufności

Zachowanie się dziennych zwrotów indeksów giełdowych czy też kursów walut często próbujemy modelować, porównując je z rozkładami znanych zmiennych losowych normalnych lub t Studenta

kiedyś uważanych za czysto teoretyczne daje się doskonale stosować. Oczywiście do metod ilościowych, które w tej chwili opisuję, należy podchodzić z pewną rezerwą. Dostarczają one istotnych danych przy założeniu, że dobierzemy właściwy model i dobrze wyestymujemy jego parametry. Dlatego też język matematyki i metod ilościowych jest pomocny, ale nie zastąpi w pełni eksperta, który na podstawie wyników obliczeń i swojej wiedzy podejmie poprawne decyzje jakościowe.

Niemniej jednak nie ulega wątpliwości, że ryzyko w różnych sytuacjach można i powinno się mierzyć, zaś przedstawicieli szeroko rozumianych nauk ilościowych, badających ryzyko, czeka jeszcze dużo pracy. ■

Chcesz wiedzieć więcej?

Dempster M.A.H. (Ed.) (2002). *Risk Management: value at risk and beyond.* Cambridge University Press.

Foellmer H., Schied A. (2002). *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time.* Walter de Gruyter.

Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner L. (2006). *Matematyka Finansowa. Instrumenty pochodne.* WNT.

Shiryaev A.N. (2001). *Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory.* World Scientific.