PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LX – ZESZYT 4 – 2013

WŁADYSŁAW MILO

LOSOWOŚĆ A CHAOTYCZNOŚĆ

1. WSTĘP

Pojęcia „losowość”, „chaotyczność” są dziś w powszechnym użyciu w nauce, sztuce, polityce, zarządzaniu różnego rodzaju organizacjami, a także w codziennych ludzkich działaniach i rozmowach. Zasadnicza treść tych pojęć wyłoni się dzięki odpowiedzi na następujące pytania:

pyt. 1. Losowość dla kogo?

pyt. 2. Losowość, chaotyczność czego?

pyt. 3. W czym przejawia się losowość, chaotyczność tego czegoś?

pyt. 4. Jakie są formy losowości i chaotyczności?

Zanim spróbujemy odpowiedzieć na niektóre z tych pytań, warto przyjąć następujące ogólne określenia:

(01) losowość i chaotyczność to ustalone – przez obserwatorów, badaczy – cechy przedmiotów;

(02) rozpatrywane i obserwowane przez badaczy i obserwatorów przedmioty tj, m.in. takie obiekty jak: fakty; zdarzenia; zjawiska realnego świata; abstrakcyjne – teoretyczne uogólnienia realnych zjawisk w formie hipotetycznych praw empirycznych, teorii; sądy o: przeszłości, przyszłości, zdarzeniach, zjawiskach kultury, gospodarki, polityki, kosmologii.

Pojęcia losowości, chaotyczności, chaosu są dziś w powszechnym użyciu praktycznie we wszystkich dziedzinach nauk teoretycznych i stosowanych. W szczególności żadne współczesne badanie ekonometryczne czy statystyczne nie może się obejść bez analizy losowości czy chaotyczności zjawisk. Przykłady takich analiz podają, m.in. Zieliński (1989, 1992), Osiewalski (2001), Piasecki (2007), Orzeszko (2004, 2005), Lachowicz (1999), Banasiak, Lachowicz (2002), Zawadzki (1996, 2006, 2012), Perzanowski (1997), Ostasiewicz, Ronka-Chmielowiec (1994).

Historia filozofii, nauk szczegółowych, zawiera szereg przykładów ciągłych zmian treści pojęć losowości i chaotyczności oraz intensywności ich użycia w nauce i codziennym życiu. O niektórych z tych zmian i aplikacji wspominamy okazjonalnie niżej oraz w Milo (2013). Szerokie ich omówienie w odniesieniu do losowości można znaleźć, np. w Milo (2012). W § 2 spróbujemy zwięźle odpowiedzieć na pyt. 1 i pyt. 2, zaś w § 3 na pyt. 3 i pyt. 4.

2. ONTOLOGICZNE I METODOLOGICZNE PODSTAWY „LOSOWOŚCI I CHAOTYCZNOŚCI"

Pojęcia „los", „losowy", „losowość" do języka polskiego trafiły z języka niemieckiego, w którym „Los" znaczy, m.in. przeznaczenie, traf, los na loterii, przypadek. W języku greckim los to *τύχη*, *μοιρα* (tychi, mojra) czyli przypadek, powodzenie, pomyślność, fortuna, sprzyjające okoliczności. W języku łacińskim (i później, m.in. francuskim) alea to traf i to ślepy, przypadek, ryzykowne przedsięwzięcie, hazard, gra hazardowa (w kości np.), też przypadłość nazywana accidens (akcydens po polsku) lub symbebekós (*συμβεβηχός* po grecku). Akcydens to nieistotna cecha, właściwość, własność, czyli przypadek, ale też nieistotny i niekonieczny element tkwiący w czymś bardziej złożonym.

Przyjmując definicję (01) z §1 przez losowość będziemy rozumieć następujące cechy przedmiotów wymienione w definicji (02):

c1) przedmioty te są obserwowalne i/lub analizowalne przez co najmniej 2 niezależnych obserwatorów i/lub analityków, tj. obserwowalne i/lub analizowalne są co najmniej 2 rozróżnialne przez nich cechy: cecha istnienia substancjalnego lub pojęciowego obiektu oraz nierozerwalnie z nią związana cecha stowarzyszona przypadkowa, której zaobserwowanie lub przewidzenie wystąpienia – z uwagi na ułomność procesu obserwacji lub eksperymentu – są niemożliwe do ustalenia przed dokonaniem obserwacji. Przykładami takich cech stowarzyszonych są: obserwowany kolor, kształt ciała, czas i miejsce wystąpienia zdarzenia przyrody biologicznej czy gospodarczej, wynik rzutu monetą symetrycznie wyważoną, wynik „losowego" ciągnienia numerowanych 6 kul z 49 kul;

c2) zarówno procesy powstawania (istnienia) jak i ginięcia (nie-istnienia) obiektów jak i konkretnie obserwowane wzorce cech stowarzyszonych (koloru, kształtu, czasu, miejsca, działania, stanu, ilości, jakości, stosunku, położenia) przedmiotów są nieprzewidywalnie nieregularne;

c3) cechy z (c1) i (c2) implikują ignorancję obserwatorów i analityków o prawach ruchu lub spoczynku rzeczywistych przedmiotów, brak – w momencie obserwacji lub eksperymentu – odpowiednich instrumentów pomiaru lub obserwacji sił i kierunków wzajemnego oddziaływania obserwowanych obiektów albo nieznajomość kolejności występowania w czasie i przestrzeni obserwowanych obiektów realnych, czy wreszcie nieznajomość reguł wnioskowań dla zbiorów sprzecznych racji i/lub następstw, brak wiedzy o regułach przemian fazowych form i struktury obserwowanych rzeczy. Z (c1)-(c3) widać, że losowość i chaotyczność to wygodny terminologiczny opis sytuacji obserwacyjno-badawczej dla obserwatora, badacza zjawisk o nieregularnych przebiegach, a także dla każdego człowieka intuicyjnie rozumiejącego sens tych słów.

Uwaga 2.1. Najjaskrawszych przykładów źródeł losowości dostarczają nam historyczne opisy gier hazardowych w kości, karty, gier sportowych. Okazuje się, że zawsze istnieli gracze-oszuści, którzy stosując prymitywne „chwyty growe" z góry znali wyniki gier bo je „projektowali (programowali) przed grą”. Dla postronnego obserwatora wyniki tych gier były jednak losowe, tzn. a priori nieprzewidywalne, czyli że dla niego losowe znaczyły wyniki nieprzewidywalne przynoszone przez tzw. los.

Uwaga 2.2. Dla egzaminatora numery, np. 7 pytań – losowane przez studenta na egzaminie – są związane z konkretnymi treściami, które zna, bo sam je układał, więc nie są one dla egzaminatora losowe. Dla owego studenta zaś, są one losowe, jeśli ktoś wcześniej ich mu nie wyjawił. Podobnie jest z „odkrywaniem zdarzeń rynkowych lub zawodowych”. Dla np. dyrektora zarządu banku X, ustalona przez niego kontrola oddziału XX dn. 20.03.2013, w innym mieście jest zdarzeniem pewnym, ale dla personelu tego oddziału (jeśli nikt z tego personelu o tym nie wiedział, prócz dyrektora) kontrola ta jest losowa co do czasu, skali szczegółowości, ostrości – z uwagi na niewiedzę o jej nastąpieniu i charakterze. Oznacza to, że w generowaniu owej losowości – dla nieuprzedzonych kontrolowanych – biorą udział następujące obiekty i przedmioty procesu: działający decydent, kontroler oraz doznający kontroli podmiot, tj. oddział XX, czas trwania kontroli, miejsce, ilość kontrolowanych stanów działalności oddziału XX.

Uwaga 2.3. Akceptacja losowości jako cechy ignorancji decydentów, obserwatorów, analityków co do przyszłych lub aktualnych wyników działań obiektów przyrodniczych, stanów procesów przyrodniczo-gospodarczo-społecznych (w tym stanów równowagi) trwa od czasów antycznych. Jest ona z jednej strony wygodną opisowo-analityczną strategią człowieka w procesie adaptacji wobec zmiennych warunków życia, choć z drugiej strony jest ona oznaką przynajmniej częściowej nieznajomości tych przedmiotów, względem których zakłada on istnienie losowości. Założenie losowości procesu, to przyznanie się do nieznajomości faktycznych cech i mechanizmu funkcjonowania tego procesu, czyli eufemizm zasłaniający niewiedzę o tym procesie.

W II połowie XX w. niezwykłą popularność zdobyły terminy chaotyczność, chaos, chaotyczny. Przez chaotyczność intuicyjnie rozumieć będziemy cechę braku porządku, braku trwałych wzorców cech w obserwowanych i/lub analizowanych przedmiotach i ich relacjach. W codziennym życiu zaś chaos oznacza sytuację, w której coś się wydarza w sposób niezorganizowany, nieuporządkowany, bałaganiarski albo ciąg takich sytuacji. W kosmologii, metafizyce, ontologii, chaos to stan lub zbiór stanów wszechświata zanim nastał jakikolwiek porządek (o czym pisał już Hezjod w swej Teogonii). Pitagorejczycy ujmowali chaos jako przestrzeń obrazowaną przez bezładne sploty liczb, zaś Platon i Arystoteles, jako pramiejsce powstałego świata. Dla Anaksymandra chaos jest nieokreślonym pratworzywem świata, dla Anaksagorasa przestrzenią nieskończenie podzielnych elementów, z kolei dla Demokryta nieuporządkowanym nieskończonym zbiorem cząsteczek (atomów), zaś dla stoików bezkształtną masą. Te możnościowo-materialne ujęcia przetrwały do czasów nowożytnych by w tych ostatnich przekształcić się w możnościowo-wirtualne, tj. m.in. ujmowanie chaosu jako transcendentnego praźródła wszelkich sił w kosmosie (Paracelsus, Böhme, Schelling, von Baader, Nietzsche).

Kontynuując wątek ontycznego ujmowania chaosu można ten ostatni rozumieć jako czasowy ciąg lub zbiór stanów wszechświata czyli powtarzające się zjawisko wydarzania się, czy też powstawania różnych nieregularnych, co do formy i struktury substancjalnej, rzeczy i relacji między nimi zachodzącymi, w tym ruchu przestrzennego, lub przestrzenno-czasowego. W wieku XIX i później, zarówno matematycy jak i przedstawiciele najpierw fizyki, chemii a następnie pozostałych gałęzi wiedzy rozpropagowali pojęcie chaosu i chaotyczności w związku z analizą matematycznych modeli dynamiki, a w szczególności w związku z analizą dynamicznego chaosu jako „zjawiska" zachowań się obrazów szczególnych podzbiorów dziedzin funkcji czyli obrazów trajektorii (orbit) wartości stanów bądź parametrów matematycznego modelu systemu bądź orbit niezmienniczych stanów głównych obserwowanych zmiennych związanych formalnymi równaniami. Podwaliny matematyczne pod analizę dynamiki położył H. Poincare, a dalszy jej rozwój kontynuowali A. Lapunow, J. Hadamard, G. D. Birkhoff, A. Kołmogorow, M. J. Feigenbaum, E. Lorenz, B. Mandelbrot, D. Ruelle, J. Von Neuman, Y. Sinai, N. Kryłow, A. Andronow, V. Arnold. Dziś mamy wiele naukowo wpływowych monografii i podręczników poświęconych matematycznej teorii chaosu. Część z nich przetłumaczono na j. polski, jak np. podręczniki H. G. Schustera, E. Otta, J. Gleicka, H. Peitgena. Pojawiły się też podręczniki polskich autorów, m.in. T. Sękowskiego, M. Tempczyka. Przez chaotyczność rozumie się tam albo cechę braku wzorców zachowań orbit rozwiązań pojedynczych równań lub układów równań różniczkowych, różniczkowo-całkowych, różnicowych bądź wzorców orbit utworzonych z wartości lewych stron tych równań przy szczególnych, krytycznych dla potwierdzenia chaotyczności wartości parametrów wymienionych równań. Jest to przeto chaotyczność teoretyczna, abstrakcyjna, która daje jednak podstawy do analizy ontycznych, rzeczywistych systemów otaczającego nas świata fizycznego. Sposób ujmowania i założenia modeli chaosu deterministycznego świadczą, iż autorzy modelowo opisują nieregularne zjawiska i procesy geometryczno-analityczne, którym w domyśle odpowiadają ich fizyczne bądź chemiczne wzorce z pozycji determinizmu, a pojęcie chaotyczności jest u nich bliskie pojęciu niestabilności typu MA-DU, tj. że małe zaburzenia początkowe wartości parametrów modelu powodują duże zmiany w przebiegu trajektorii zmiennych endogenicznych modelu. Wprawdzie większość autorów używa terminu „chaos deterministyczny systemu(ów)", to z treści referatów, artykułów i książek łatwo wskazać, iż sens „systemu" jest zwykle matematyczno-modelowy, choć sposób użycia tego pojęcia często bywa dwuznaczny, tj. można go rozumieć jako system bytu rzeczywistego jak i bytu pomyślanego-wirtualnego, modelowanego matematycznie.

Istnieje też idea chaosu przypadkowego (losowego). Od strony filozoficznej ideę tę propagowali, m.in. H. Bergson, G. Deleuze, F. Nietzsche (z pozycji częściowego lub absolutnego determinizmu) zaś z pozycji statystyczno-probabilistycznych, m.in. R. von Mises, A. Kołmogorow, P. Martin-Löf. Z metodologicznego punktu widzenia przedstawione omówienie pozwala więc stwierdzić, że:

- losowość i chaotyczność dotyczą zarówno przedmiotów świata fizycznego jak i świata pojęć o rzeczywistości czy też świata wirtualnego wymyślonego, teoretycznego;
- losowość uchwycona spostrzeżeniowo zmysłami i zapisana pomiarowo jak i procesualnie dziejąca się wokół obserwatora lub obserwatorów, przejawia się w nieprzewidywalnej, niezrozumiałej dla obserwatora(ów) nieregularności i niestabilności typu MA-DU przebiegu zmienności wartości obserwowanych cech, obserwowanych przedmiotów, tj. w ignorancji prawidłowości zmian cech tych przedmiotów i wzajemnych zależności zmian badanego przedmiotu od zmian cech innych przedmiotów; przyjmujemy więc, że losowość oznacza kryptograficzną dla obserwatorów szyfrację – dokonaną przez Naturę – cech rzeczy, zdarzeń, zjawisk, procesów, którą jednak postęp badań, pomiarów, analiz powoli deszyfruje, tj. odsłania jej tajemnice;
- chaotyczność deterministyczna, podobnie jak losowość, przejawia się w nieprzewidywalnej nieregularności wzorców zmienności cech formy stanów rzeczy, procesów rzeczywistych otaczającego nas świata, bądź nieprzewidywalnych wzorcach cech procesów teoretyczno-modelowych. Różnica w zakresie tych pojęć polega na przyjmowaniu założenia, że dla obserwatora i analityka losowość rzeczy, procesów, wynika z nieokreśloności i nieznajomości prawidłowości ich zmian (w czasie, przestrzeni) wszystkich istotnych przyczyn tych zmian, zaś przy chaotyczności, przyjmuje się, że znane są ogólne matematyczne wzory tych prawidłowości, lecz że ich numeryczna realizacja – jak na to wskazują własności rozwiązań modeli tych postulowanych prawidłowości nawet w przypadku bardzo prostych nieliniowych modeli- rodzi chaotyczne deterministyczne wzorce zachowań teoretycznych orbit ruchu. Bezładność, czy też brak porządku formalnego, to cechy widoczne w przedmiotach, w stanach spoczynku jak i ruchu rozpatrywanego w języku losowości jak i chaotyczności, niezależnie czy owe przedmioty są fizyczne czy abstrakcyjno-ideowe. Przypuszczamy, że bardziej pojęcia te pojawiły się z bezradności w ustalaniu empirycznych praw oraz potrzeb znalezienia namiastki ostatecznych metodologicznych rozwiązań niż wierności analiz ontologicznych.

Uwaga 2.4. Dotychczasowa analiza stanowi próbę odpowiedzi na pyt. 1, pyt. 2 i pyt. 3. Załączone uwagi i refleksje nie wyczerpują problematyki związanej z odpowiedziami na te pytania.

3. FORMY I STOPNIE LOSOWOŚCI I CHAOTYCZNOŚCI

Losowość rozumiana jako cecha nieodkrytych tajemnic istnienia i zmian otaczającego nas fizycznie realnego świata, jest odzwierciedleniem ignorancji jego badacza. Przyjęcie założenia o losowości zmian lub wzorców zmian stanowi zarówno przyznanie się do niewiedzy o faktycznych przyczynach i trwałych prawidłowościach tych zmian, jak i wygodną zasłonę ideową owej ignorancji, a także wygodną podstawę rozwijania protagorejskich chwytów dialektycznych. Przyjmowanie tak rozumianej formy losowości o podłożu reistycznym jest szczególnie zrozumiałe dla badaczy systemów realnego świata na poziomie mikroskopowym. I choć jest to ułomna próba obrony wyników badań, w których pomiary traktuje się jako realizację procesów losowych to często wyniki te pomagają nieźle prognozować średnie stany analizowanych procesów ruchu otaczającego nas świata mikropodmiotów w gospodarce albo cząsteczek atomu przyrody fizycznej. Powyższe uwagi ułatwiają nam wprowadzenie następującego podziału form losowości:

l1) losowość reistyczna, teoretyczno-reistyczna, teoretyczna, wirtualna;
l2) losowość makroskopowa, mezoskopowa, mikroskopowa;
l3) losowość: eksperymentu(ów) na elementach Natury, Myśli, wyboru decyzji o sposobie działania, wyboru cech działania, wyników gier (w kości, karty, szachy, człowieka z Naturą itd.) realizacji planów, projektów, poszczególnego człowieka, grupy ludzi; wyboru losu na loterii;
l4) losowość: naturalna, wymyślona;
l5) losowość: obserwowalna, nieobserwowalna;
l6) losowość: prawie zupełna, ograniczona.

Wyróżnione formy losowości mają swoje kryteria wyróżnienia. I tak kryteriami wyróżnienia są:

k1) forma przedmiotu cechującego się losowością (l1), tj. forma rzeczy z natury otaczającego świata, idee i pojęcia odnoszące się do owych rzeczy, matematyczne zdarzenia losowe (w sensie Borela, Kołmogorowa, Łukasiewicza), czy też losowość zdarzeń opisywanych przez literatów (poetów, powieściopisarzy);
k2) forma i skala substancjalno-ideowa obiektów lub ich elementów składowych (losowość l2);
k3) forma działań człowieka, grup ludzi (losowość l3);
k4) formy powstania, ginięcia zmian obiektów w Naturze lub obiektów wymyślonych przez człowieka (por. l4);
k5) formy rzeczy obserwowalne przez obserwatorów zmysłowo, których charakter zmienności jest nieprzewidywalny w czasie i przestrzeni, a także nieobserwowalne zmysłowo formy rzeczy, które miały miejsce w przeszłości, aktualnie lub w przyszłości ze względu na ograniczenia w zdolności obserwacji przez obserwatorów z powodów czasowych, przestrzennych, braku odpowiednich narzędzi obserwacji i odpowiednich pomysłów pomiarowych (por. l5);
k6) formy zupełnej lub częściowej niewiedzy o rzeczach, zdolności zaobserwowania badanej rzeczy (por. l6).

Stopnie losowości to stopnie niewiedzy o świecie obserwowanym, jego mechanizmach. Najłatwiej je oceniać poprzez stopnie błędów prognozowania zdarzeń i zjawisk tego świata. Z ontyczno-epistomologicznego punktu widzenia można więc wyróżnić takie stopnie jak, np. słaba, średnia, mocna, zupełna losowość.

Pojęcie np. mocnej losowości może być zdefiniowane różnie. Popularność zdobyło pojęcie utworzone na podstawie definicji losowości Martin-Löfa (1966). Wg tej definicji ciąg zdarzeń, liczb jest losowy jeśli ma typowo nieodgadniony, nieprzewidywalny porządek, np. zobrazowany w formie skończonego ciągu znaków, (por. Kołmogorow, Uspenski, 1987):

LML1) 10001|01110|11110|10000,

LML2) 01111|01100|11011|10001,

albo nieskończone wersje LML1, LML2 ciągów zer i jedynek.

Oznaczmy przez Ω_{01} zbiór ciągów postaci LML1, LML2 itd. oraz przez Ω_{01}^{∞} zbiór ciągów zer i jedynek o nieskończonej liczbie elementów o nieprzewidywalnych porządkach (kolejnościach) występowania 0 i 1. Kołmogorow (1963) zaproponował, żeby ciąg S_N, $N \geq n$ uznać za $(n, \in)$ – losowy względem ustalonej skończonej rodziny $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1}^{I_s}$ dopuszczalnych algorytmów (reguł) wyboru miejsca dla elementu ciągu jeśli istnieje taka liczba p $\in$ [0,1], że względne częstości 1-*ek* w podciągach S_N^i[generowane przez użycie algorytmu ϕ_i do S_N] wszystkie leżą w przedziale $\langle p - \varepsilon, p + \varepsilon\rangle$. Pokazał on też, że jeśli liczba N_A takich algorytmów spełnia $N_A \leq 2^{-1} exp\left(2n\varepsilon^2 \cdot (1 - \varepsilon)\right)$, wówczas dla dowolnego $p > 0$ i $N \geq n$ istnieje względem Φ (n, ε) – losowy binarny ciąg S_N.

Ze statystycznego punktu widzenia niestety brak jest odpowiednich testów formułowanych dla wyróżnienia stopni losowości. Statystycy proponują jednak obliczeniowo i decyzyjnie stosunkowo proste testy losowości w ogóle. Do znanych testów losowości należą, m.in. test Wilcoxona, testy istnienia Walda-Wolfowitza, Skellama, Moore'a, Hopkinsa, Pielou, Holgate'a, Eisenharta-Sweda, Morana, Coxa, Bartholomewa, Berksona, Larsena i in., O'Briena, Assuncao.

U1. Zauważmy, że definicja Kołmogorowa określa nie tylko losowość, ale i jej stopnie uzależnione od ustalonych form analitycznych algorytmu ϕ_i oraz liczb $n, \varepsilon > 0$. Ponadto wybór formy ϕ_i ulosowienia nie może być dowolny lecz gwarantować nieregularność wyboru miejsca alokacji jedynek i zer, jeśli hipotezę H_R o istnieniu losowości traktujemy jako hipotezą testowaną. Wówczas wybrana regularna forma $H_a : \phi_j$ dotyczy hipotezy nietestowanej alternatywnej. Odrzucenie nietestowanej hipotezy alternatywnej o nie-losowości ciągu S_N oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia H_R o losowości S_N.

U2. Zarówno Kołmogorow jak i m.in. Chaitin, Solomonoff, Martin-Löf definiują losowość w oparciu o pojęcie obliczeniowej złożoności algorytmów i programów komputerowych umożliwiających generowanie pseudo-losowych ciągów. Istnieje wiele podejść do pomiaru złożoności obliczeniowej algorytmów, programów obliczeniowych stosujących wybrane algorytmy oraz komputery. Różnorodność tych elementów przemawia za stosowaniem dobrej miary informacji niesionej przez S_N jako podstawy pomiaru losowości ciągu. Zatem im wartość tej miary jest mniejsza tym bardziej ciąg S_N jest losowy.

U3. Bardzo wnikliwe i inspirujące uwagi o losowości (zwanej przypadkowością) podał Smoluchowski (1916, 1923). Z punktu widzenia testowania najciekawsze są uwagi, które po naszej analityczno-formalnej rekonstrukcji tekstów tego Autora prowadzą do następujących dwu definicji formalnych:

DSM1: Powiemy, że zjawisko $Y(t)$, $t \in T$ obserwowane w okresie T przez obserwatora O_1 z wiedzą W_1 i wybranej przez niego losowej przyczynie $X(t)$ tego zjawiska – jest losowe, jeśli kształt funkcji rozkładu prawdopodobieństwa $P_Y(y)$ nie zależy od kształtu funkcji $P_X(x)$ dla przyczyny X, czyli że nie istnieje funkcja $\psi(y,x): P_Y(y) = \psi\big(P_X(x)\big)$. Do roli P_X można przyjąć dowolne funkcje gęstości lub częstości $f_Y(y)$, $f_X(x)$ lub dystrybuanty $F_Y(y)$, $F_X(x)$.

Zatem DSM1 to propozycja metody falsyfikacji tezy badawczej, że X jest losową przyczyną losowego skutku Y. Gdy $\boldsymbol{X}$ jest założonym wektorem przyczyn, wówczas falsyfikujemy tezę, że brany zestaw przyczyn losowych jest właściwy. W sytuacji, gdy przyjęto na gruncie tej metody, że dla np. losowych przyczyn X_1, X_2 istnieje ψ_{12}, zaś dla losowych przyczyn X_3, X_4 nie istnieje ψ_{34} wówczas wystąpi sytuacja, w której Y jest losowe ze względu na ψ_{34} i częściowo ze względu na $\psi_{12\cdot 34}$. Empirycznie warto sprawdzić jakość prognostyczną $\psi_{12\cdot 34}$ i odpowiadający jej predyktor $\hat{Y}(t) = \Phi(X_1, X_2, \beta \mid X_3, X_4)$.

DSM2: Powiemy, że alternatywne skutki Y_1, Y_2 są w przybliżeniu losowymi skutkami tej samej przyczyny X jeśli:

$$\frac{P\big(y_1(t)\big)}{P\big(y_2(t)\big)} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} sgn[\Delta X(t)]^{+}}{\sum_{t=1}^{\infty} sgn[\Delta X(t)]^{-} + \sum_{t=1}^{\infty} sgn[\Delta X(t)]^{+}} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

albo

$$\frac{P\big(y_1(t)\big)}{P\big(y_2(t)\big)} = \frac{\sum_{t=2}^{4,6,\dots} sgn[X(t)+\Delta X(t)]^{+}}{\sum_{t=1}^{1,3,5\dots} sgn[X(t)+\Delta X(t)]^{-} + \sum_{t=2}^{4,6,\dots} sgn[X(t)+\Delta X(t)]^{+}} = \frac{1}{2}, \tag{2}$$

gdzie, np. znak „–„ oznacza, że liczymy tylko przyrosty ujemne.

W sytuacji gdy tę samą przyczynę zastąpimy wektorem przyczyn testowanych, wówczas sumy można tworzyć addytywnie, bez wag różnych od jedynek lub z wagami różnymi od jedynek wyrażającymi nasze dodatkowe przypuszczenia o intensywności oddziaływania poszczególnych przyczyn. Jest otwartą kwestią zbadanie stopnia użyteczności empirycznej propozycji DSM1, DSM2 przy rozwiązywaniu zadań praktyki gospodarczej, techniki, medycyny. Nawet po uzyskaniu empirycznie akceptowalnych wyników takich badań należy jednak pamiętać, że cecha losowości szeregu obserwacji jako braku prawidłowości albo braku rozpoznanej prawidłowości albo istnieniu ukrytej prawidłowości znaczy różne rzeczy. I tak przykłady:

LWM1: 135412135412135421135412…;

LWM2: 141592… (ciąg pierwszych 10^4 dziesiętnych znaków ułamkowej części π);

LWM3: ciąg liczb całkowitych postaci $\hat{n}(x)$, x = $\overline{1,2000}$, $\hat{n}(\cdot) \in \{0,1,\dots,9\}$ będących wartościami wielomianu stopnia 98 i które to wartości $\hat{n}(\cdot)$ uzyskuje się w grze w ruletkę w różnym stopniu uznamy za losowe. Intuicyjnie stopień losowości w kolejnych przykładach rośnie. Podobnie pogląd, że jeśli w rezultacie doświadczeń pomiarowych nie umiemy ich opisać w akceptowalnej co do złożoności formie, to powiemy, że ciąg wyników pomiarów może być losowy lub prawie losowym. Wówczas albo odrzucamy istnienie prawidłowości albo przyjmujemy istnienie losowych zaburzeń tych prawidłowości. Ostatnie trzy przykłady stanowią swoistą ilustrację tajemniczo brzmiących, bez wyjaśnienia, nazw „zdarzeń losowych". Z nieznanych mi powodów w światowym użyciu mówi się o zdarzeniach losowych albo jako o elementach borelowskiego ciała zdarzeń złożonych albo jako elementach zbioru elementarnych zadań losowych. To poprzednie użycie tylko raz zaznacza A. Kołmogorow w swej monografii z 1933 roku (rozdz. I, §1 kiedy mówi, że elementy zbioru F = {zbiór podzbiorów zbioru zdarzeń elementarnych}). Zupełnie niezrozumiałe jest, że polscy probabiliści, statystycy nie zawsze wspominają o wcześniejszych polskich aksjomatycznych sformułowaniach rachunku prawdopodobieństwa. Otóż, np. w roku 1923 (10 lat przed Kołmogorowem) w Fundamenta Mathematica Vol. 4 podobne systemy aksjomatów wprowadzili: Łomnicki (1923, s. 34–71, artykuł „Nouveaux fondements du calcul des probabilities") oraz Steinhaus (1923, s. 286–310, artykuł: „Les probabilites denombrables et leur rapport à la théorie de la mesure"), a od strony logicznej Łukasiewicz (1913), oraz Mazurkiewicz (1932) w Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung Comptes Rendus Société des Sciences Warszawa, III, 25, s. 1–4. W obu pierwszych wymienionych artykułach z dużą starannością autorzy piszą o ontycznym rodowodzie losowości i wskazują, że teorio-miarowe i mnogościowe podstawy swych systemów zaczerpnęli z wcześniejszych sugestii Borela (1905, 1909), Lämmela (1904), Czubera, a w szczególności Sierpińskiego (1919), Broggi (1907), Banacha (1923), Jordana (1883), a także Bernsteina (1912), Burstina, Bohlmanna (1900).

Dla większości ww. autorów prawdopodobieństwo było miarą zbioru elementów, których losowość była zakładana a priori jako sąd pozamatematyczny.

Przypisanie przeto tylko Kołmogorowi pierwszeństwa w użyciu języka teorii miary jest nie tylko zwyczajnym przeoczeniem. Zasługą Kołmogorowa jest jednak np. uproszczenie argumentacji Von Misesa, lansującej częstościowe ujęcie losowości i prawdopodobieństwa, w którym to ujęciu, kluczową rolę odgrywa losowość wyboru „kolektywu" wyników pomiaru oraz niezbyt krótkiego „podkolektywu". Wyboru tego należy dokonać wg złożonego, choć realizowalnego algorytmu wyboru, a zaliczenie elementu do owych zbiorów powinno nie brać pod uwagę elementu zaliczanego.

Kołmogorow proponuje liczyć złożoność algorytmu A wyboru za pomocą miary K:

$$K_A\left(X^{(n)}\right) \geq nH(p), \text{ gdzie } |K_A(X^n, p) - nH(p)| < \varepsilon, \tag{3}$$

gdzie $nH(p) = n \cdot [-plg(p) - (1-p)\,lg(1-p)]$ zaś p to prawdopodobieństwo uzyskania m jedynek, których empiryczna częstość wynosi $^m/_n$, zaś n to długość ciągu zer i jedynek, tj. $x^n = (x_1, \ldots, x_n)$.

Martin-Löf wykazał, że

TML1: Jeśli $f(n)$ to funkcja algorytmu obliczeniowego taka, że $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-f(n)} = \infty$, to dla dowolnego dwuwartościowego (np. 0-1) ciągu $x^\infty = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ istnieje nieskończenie wiele takich wartości n, że

$$K_A(x^n) < n - f(n). \tag{4}$$

Owe dwuwartościowe ciągi Martina-Löfa wyników z niezależnych doświadczeń mają własności efektywnie sprawdzalne w ramach hipotezy losowości, że $P\{X(n) = 1\} = \frac{1}{2}$.

Ujęcie losowości Kołmogorowa, Martin-Löfa oparte na idei pomiaru złożoności algorytmu konstruowania losowego ciągu było rozszerzane, np. przez Chaitina (1966), Lovelanda (1966), Schnorra (1969), Trahtenbrota (1967), Barzdina (1964), Zwonkina i Levina (1970), choć inspirację pierwotną wymienionych ujęć stanowi artykuł Churcha (1940).

Koncepcja, że istnieje oszacowanie z dołu wartości $K_A(x^n)$, która pozwala stwierdzić, że ciąg liczb jest losowy jest umową, że istnieje choć jeden obserwator ciągu, który ma kłopot z rozpoznaniem (rekonstrukcją) algorytmu oryginalnego generującego ów ciąg i że wypróbowuje on przynajmniej jeden (swój lub czyjś) algorytm A, który generuje ciąg liczb i porównuje ów „swój ciąg” z „ciągiem oryginalnym”, którego algorytmu A_0 tworzenia tego ciągu nie zna. Z sytuacją taką mamy do czynienia w praktyce, gdy porównujemy własności danego ciągu liczb pomiarowych z ciągami uzyskanymi wg generatorów liczb pseudo-losowych, w których za momenty rozkładów bierzemy oszacowania momentów otrzymanych na podstawie owego ciągu pomiarowego. Złożoność $K_A(x^n, p)$ wówczas jest a priori znana i różna dla różnych generatorów. Przypuśćmy, że zastosowaliśmy dwa generatory-algorytmy: A_G i A_S rozkładów Gamma i Studenta o znanych dystrybuantach $F_G(x)$, $F_S(x)$ i gęstościach $f_G(x)$, $f_S(x)$. Okolicznościom tym towarzyszą miary obliczeniowej złożoności $K_G(x, F_G(x))$, $K_S(x, F_S(x))$. Ale dla próby losowej $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ i znanej pomiarowo jej realizacji $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$ z próbkową średnią $\bar{x}$ i wariancją $\hat{\sigma}_x^2$, oraz generatorami wg $\hat{f}_G(x; \bar{x}, \hat{\sigma}_x^2)$ i $\hat{f}_S(x; \bar{x}, \hat{\sigma}_x^2)$ możemy wygenerować np. 10000 realizacji (przebiegów symulacyjnych dających 10000 realizacji wg $\hat{f}_G$ oraz 10000 wg $\hat{f}_S$).

Wówczas możemy policzyć średnie i wariancje po 10000 przebiegach (czyli po 10000 realizacji próbek, których rozkłady (algorytmy) znamy), tj. wartości

$$\bar{X}_{sym}^G, \bar{X}_{sym}^S \text{ oraz } \hat{\sigma}_{sym,G}^2, \hat{\sigma}_{sym,S}^2,$$

a także różnice między nimi a odpowiadającymi im $\bar{\boldsymbol{X}}$, $\hat{\sigma}^2$ z oryginalnej próby o rozkładzie $F(x)$ i gęstości $f(x)$, których postaci z założenia nie znamy. Oznaczając

$$\bar{D}^G = \bar{X}^G_{sym} - \bar{X},\, \bar{D}^S = \bar{X}^S_{sym} - \bar{X},\, \bar{D}^G_\sigma = \hat{\sigma}^2_{sym,G} - \hat{\sigma}^2_X,\, \bar{D}^S_\sigma = \hat{\sigma}^2_{sym,S} - \hat{\sigma}^2_X \quad (5)$$

i przyjmując określenia

$$|\bar{D}^G| \le \delta_G, |\bar{D}^S| \le \delta_S,\, |\bar{D}^G_\sigma| \le \delta_{\sigma,G},\, \left|\bar{D}^S_\delta\right| \le \delta_{\sigma,S} \quad (6)$$

powiemy, że losowa próba $\boldsymbol{X}$ z realizacją $\boldsymbol{x}$ jest $\delta_G, \delta_S, \delta_{\sigma G}, \delta_{\sigma S}, K_G(\cdot), K_S(\cdot)$ – losowa jeśli $\bar{\bar{F}}_G\left(x; \bar{x}^G_{sym}, \bar{\hat{\sigma}}^2_{sym,G}\right) \approx \frac{1}{2}$ oraz $\bar{\bar{F}}_S\left(x; \bar{x}^S_{sym}, \bar{\hat{\sigma}}^2_{sym,G}\right) \approx \frac{1}{2}$, gdzie $\bar{\bar{F}}_G(\cdot)$, $\bar{\bar{F}}_S(\cdot)$, oznaczają średnie po x, wartości dystrybuant z procesu symulacji po 10000 przebiegach symulacyjnych. Pozostaje otwartą kwestią w jakim stopniu powyższa autorska propozycja sprawdzi się w analizach teoretycznych i praktycznych. W propozycji tej wybór małych dodatnich progowych wartości $\delta_G, \dots, \delta_{\sigma S}$ powinien uwzględnić np. poziomy istotności testów 0,01 lub 0,05. Jeśli przyjmiemy małe wartości tych progów różnic oraz wystąpią w obliczeniach symulacyjnych jeszcze mniejsze różnice $\bar{D}^G, \dots, \bar{D}^G_\sigma$, które będą towarzyszyć dużym różnicom $\bar{\bar{F}}_G(\cdot) - \hat{F}_N\left(x; \bar{x}, \hat{\delta}_X\right)$, $\bar{\bar{F}}_S(\cdot) - \hat{F}_N(\cdot)$, wówczas będziemy mówić o szczególnej losowości przejawiającej się w niestabilności użytych propozycji generatorów względem generatora typu gaussowskiego najczęściej występującego w średnich stanach zjawisk masowych.

Probabilistyczne rozumienie losowości jest przeto bliskie rozumieniu istoty losowej chaotyczności i dalekie od treści pojęcia chaotyczności deterministycznej. Znając miarę złożoności słowa binarnego (dowolnego ciągu 0-1) i rozważając nieskończone ich wersje mówi się, że ciąg X^∞ jest losowy, jeśli $K_A(x^n)$ albo entropia rosną wraz z n możliwie szybko. Chaotyczność stochastyczna odpowiada losowości wg rozkładu Bernoulliego dla ciągów, których długość opisu czynności i liczba czynności obliczeniowych rosną odpowiednio szybko. Zatem można mówić o losowości na miarę prostego rozkładu Bernoulliego jako losowej chaotyczności. Inne wersje ustanawiają chaotyczność wg miary złożoności liczonej np. liczbą operacji obliczeniowych odnoszonych do długości ciągu (por. prace Schnorra, Levina).

Tak jak fizycy stosując język probabilistyki przekonali wielu do użyteczności pojęć entropii, stochastycznego chaosu, ergodyczności procesów wyników pomiarów, tak i matematycy analizujący własności deterministycznych systemów równań różnicowych, różniczkowych i całkowo-różniczkowych znaleźli zwolenników użyteczności pojęć deterministycznego chaosu. Pierwsze uwagi na ten temat podają Hadamard (1898) i wcześniej Poincare (1892), Saint-Venant, Boussinesq, Maxwell. Tematyka chaosu deterministycznego (CD) stała się modna w latach 80-tych XX w. po rozpropagowaniu artykułów Lorenza (1963) oraz Ruelle, Takensa (1971) oraz Yorke'a, Li (1975).

Istnieje kilka definicji formalnych CD. Poprzedzimy je określeniami intuicyjnymi, bądź nawiązującymi do bardziej formalnych z prac Wigginsa (2003), Lorenza (1997), Sękalskiego (2007), Awrejcewicza (1996), Verhulsta (2000), Smale'a (1967), Ruelle (1980), Takensa (1981), Otta (1997), Dorfmana (2001), Medio, Linesa (2001), Daya (1994), Chicone (2000), Tu (1994), Crannelli (1998), Li, Yorke'a (1975), Devaneya (1989), Mac Eacherna, Berlinera (1993), Vellekopa, Berglunda (1994), Rasbanda (1990), Ruelle, Takensa (1971), czy też prace bardziej aplikacyjne Mosdorfa (1997), Bakera, Golluba (1998), Schustera (1995), Zawadzkiego (2012), Szemplińskiej-Stupnickiej (2002), Awrejcewicza (2007).

Podane 60 określeń stanowią próbę zebrania w jednym tekście różnych znaczeń pojęć chaosu i chaotyczności. W wielu artykułach i książkach, m.in. cytowanych, dotyczących dyscyplin niematematycznych, które autor przeczytał nie ma wyraźnych określeń pojęć chaosu i chaotyczności. Stąd poniższa próba ich rozszyfrowania z różnych kontekstów opisu bądź przykładów liczbowych bądź zwięzłych omówieni teorii należących do wybranych dyscyplin wiedzy.

W celu ułatwienia recepcji treści prezentowanych określeń proponujemy wyróżnić następujące grupy definicji:

g1) definicje metryczno-topologiczne (por. DCD.58-DCD.60),

g2) modelowo-procesualne, wiążące chaos, chaotyczność z reakcją modelu UD (czyli MUD) na modelowe zaburzenia lub przekształcenia (por. DCD.16-DCD.18, DCD. 20-DCD.25, DCD.31, DCD.34-DCD.39, DCD.42-DCD.56),

g3) definicje systemowo-procesualne, wiążące chaos, chaotyczność z reakcją analizowanego rzeczywistego dynamicznego systemu (UD) na zaburzenia zewnętrzne, wewnętrzne bądź oba (por. DCD.1-DCD.11, DCD.14-DCD.15, DCD.19-DCD.20, DCD.25-DCD.30, DCD.32-DCD.33, DCD.40-DCD.41),

g4) definicje systemowe ze stochastyką zachowań UD lub MUD (por. DCD. 47-DCD.48, DCD.51, DCD.57),

g5) definicje numeryczno-funkcjonalne (por. DCD.12-DCD.13).

Zestaw określeń rozpoczynamy od najbardziej opisowego i intuicyjnego określenia DCD.1.

DCD.1: Chaos deterministyczny (CD), to zjawisko albo graficzny obraz tego zjawiska, którego mechanika powstawania jest znana, choć cechują się one widocznym dla obserwatora nieładem, dysharmonią, nieuporządkowaniem, nieregularnością, tohu-bohu wokół średnich oddziaływań przyczyn wewnętrznych i zewnętrznych zjawiska systemowego. Cecha nieporządku, dotyczy zarówno czasu powstawania stanów zjawiska, miejsca ich powstawania a także stopnia wrażliwości układu dynamicznego z CD na bardzo małe zmiany położenia punktów przestrzeni fazowej PF dla UD-CD.

DCD.2: Chaos deterministyczny (CD) układu dynamicznego (UD) to mikroskopowy czasowo-przestrzenny proces ruchu elementów UD, bądź makroskopowy proces czasowo-przestrzenny ruchu całego UD pozostającego pod wpływem oddziaływania innych układów $UD_1, UD_2, \ldots, UD_m$, które to procesy ruchów cechują się nieregularnością, nieporządkiem, nietypowością, przypadkowością co do czasu, miejsca, kształtu ruchu oraz wrażliwości na siłę oddziaływań.

DCD.3: CD modelu UD czyli CD-MUD to graficzny obraz aperiodyczności, asynchroniczności, poplątania często bardzo dziwnego przebiegu orbit (trajektorii) początkowych punktów „ruchu" w PF-MUD (przestrzeni fazowej MUD), bądź orbit ruchu punktów rozpoczynających ruch z niezmienniczych zbiorów PF (NZPF).

DCD.4: CD-UD to proces ruchu UD nieliniowego autonomicznego z egzogeniczną harmoniczną siłą wymuszającą zmianę ruchu i aperiodycznymi orbitami z dziwnym atraktorem tworzonym przez funkcję generującą nieskończoną liczbę punktów, która to funkcja kawałkami nie jest różniczkowalna oraz z orbitami ruchu oddzielającymi się od siebie wykładniczo.

DCD.5: CD-UD to rodzaj ruchu UD, który z uwagi na nieznajomość lub nieprecyzyjność pomiarów stanów UD w czasie t_0 jest nieprzewidywalny, dziwny, które to cechy wynikają z istnienia nieliniowych ciągłych lub dyskretnych sprzężeń lub interakcji elementów UD.

DCD.6: CD-UD to zjawisko geometryczne, powstawania struktury geometrycznej (czyli dziwnego atraktora) spowodowane przez kolejne bifurkacje (podwojenia) okresu nowo powtarzających się, niestabilnych choć okresowych, orbit punktów początkowych ich „ruchu".

DCD.7: CD-orbit UD, wg Leonowa, to cecha wzajemnie „odbijających, odpychających się" – niestabilnych w sensie Żukowskiego – orbit „ruchu" punktów.

DCD.8: CD-UD to proces powstawania i okresowego trwania nieuporządkowanych, nieregularnych ciągłych lub dyskretnych stanów procesu ruchu UD.

DCD.9: CD-UD to taki proces tworzenia geometrycznie nieregularnych struktur orbit, że jeśli $X_0 \in A$, A-atraktor, to wskaźnik Lapunowa $\Lambda\left(\mathrm{orb}(x_0 \in \mathrm{A})\right) > 0$.

DCD.10: CD-UD to cecha trójwymiarowego UD (np. oscylatora nieautonomicznego z zewnętrznym wymuszeniem), którego orbity ruchu mogą stale „błądzić" w ograniczonym podobszarze z R^3 pomiędzy niestabilnymi punktami równowagi i innymi okresowymi orbitami niestabilnymi.

DCD.11: CD-UD to nieprzewidywalne zachowanie niestabilnych orbit wokół np. punktu siodłowego ruchu UD z ciągłością widma częstości pomiarów.

DCD12: CD-UD to własności realizacji procesu obliczeniowego wg przesunięć Bernoulliego (np. dziesiętnych rozwinięć liczb niewymiernych) czy też innych procesów interakcyjnych, np. logistycznego postaci $f(x,\mu) = \mu \cdot x(1-x)$ w bliskości $\mu \approx 3{,}7$, czy też iterowania odwzorowań okręgu w okrąg przekształceń Hénona, van der Pola.

DCD.13: CD dla modelu MUD=(X, M) układu dynamicznego to rodzaj nieporządku zbioru X przestrzeni fazowej PF określonej przez model M generujący taki zbiór chaotyczny X^{ch}, że spełnione są prawa tranzytywności, gęstości zbioru punktów okresowych i nieokresowych oraz wrażliwości kierunku ruchu od punktów początkowych orbit należących do niezmienniczych zbiorów PF.

DCD.14: CD-UD to systemy (lub ich modele), dla których pomiary cech (lub rozwiązań modeli) nie układają się tylko w orbity nieokresowe, których istnienie sprawdzić można stosując, np. wskaźniki Lapunowa, Kołmogorowa, czasowe średnie asymptotycznych orbit, czy widma częstotliwości.

DCD.15: CD-UD to cechy niestabilności orbit ruchu UD, cechy dziwnych atraktorów, cechy zjawisk biologicznych, fizyko-chemicznych, astrofizycznych, czy także cechy szeregów czasowych pomiarów albo realizacji modeli UD.

DCD.16: CD-MUD to proces obliczeniowy dochodzenia do złożonej geometrii podkowy Smale'a poprzez operacje rozciągania, ściągania, cięć, których efektem są gęste zbiory orbit okresowych i nieokresowych.

DCD.17: CD-MUD to cecha wrażliwej zależności punktów $(y, \dot{y})$ na domkniętym niezmienniczym zbiorze orbit.

DCD.18: CD-MUD to cecha przejściowa od orbit homoklinicznych do hiperbolicznych orbit okresowych.

DCD.19: CD-UD to cecha MA-DU potoku przepływu pola wektorowego sił.

DCD.20: CD-UD to cecha nieliniowego, erratycznego ruchu UD, lub „ruchu" punktów geometrycznego obrazu MUD, np. MUD-Y. Uedy, E. N. Lorenza, H. Poincarego, P. Fatou, J. Hadamarda, G. Julia, B. Mandelbrota, W. Sierpińskiego).

DCD.21: CD-UD to nieregularne, nieharmoniczne, jakby losowe zachowanie ruchu nieliniowych UD, orbit MUD objawiające się w – obserwowanych przez obserwatora z niepełną wiedzą o nieliniowych UD, MUD – cechach ilościowo-jakościowych albo w cechach, które są nieoczekiwane dla obserwatora, badacza-prognoz stanów UD, MUD mimo ich doświadczeń bądź znajomości abstrakcyjnej formy modelu MUD.

DCD.22: CD-UD, CD-MUD to jednoczesna obecność cykli okresowych rzędu k oraz cykli aperiodycznych orbit ruchu UD, MUD.

DCD.23: CD-MUD to własności ciągłej funkcji, której dwie różne aperiodyczne orbity mimo swej bliskości muszą się „rozbiec", tj. np. po okresie 3 jak pokazali Li-Yorke.

DCD.24: CD-MUD → własność dyskretnych lub ciągłych jednowymiarowych MUD jednoczesnego istnienia wielu periodycznych i aperiodycznych orbit „skaczących", nieregularnych kształtów w przestrzeni czasowej, PF zmiennych stanów o ile skoki czasów są odpowiednio duże.

DCD.25: CD-UD → niepowtarzalna, nieregularna, nieprzewidywalna, nielosowa ewolucja (ruch) wartości cech pomiarowych nieliniowych UD, MUD (jednego lub wielu) jaką obserwuje się w mechanicznych oscylatorach w rodzaju: wahadeł, wirników, wnęk laserów, pieców konwekcyjnych lub ich matematycznych modeli.

DCD.26: CD-UD → zjawisko likwidacji separatrys (krzywych ukośnych oddzielających dwa baseny atrakcji gdy te baseny się przenikają) oraz niestabilności rozmaitości punktu siodłowego.

DCD.27: CD-UD → zjawisko nieodwracalności ewolucji procesu, np. opisywanego przez równania logistyczne albo rzeczywiste zjawiska trzęsień ziemi, wirów płynów, konwekcji energii, laserowych promieni, mieszalności płynów, patologii pracy organów.

DCD.28: CD-UD → nieregularna struktura końców śnieżynki kryształu, niestabilne ślizgi płyt Ziemi uwalniające energię sprężystości, defektowa turbulencja Ginzburga-Landaua.

DCD.29: CD-UD → obserwowalne, mierzalne, nieregularne, bezładne wyniki zachodzących procesów przyrody – bądź słabo skorelowane w czasie i/lub przestrzeni wyniki pomiarów cech UD ujmowanych deterministycznie ze zmienną w czasie stabilnością i niestabilnością UD z nieprzewidywalną (z tytułu niewiedzy o „wewnętrznych" związkach elementów UD lub jego modelu), długookresową ewolucją zachowań UD.

DCD.30: CD-UD → sekwencja złożeń operacji sił rozciągania, nacisku, skurczania, składania części UD lub całego UD prowadzące do dziwnych zmian struktury UD lub ruchu UD.

DCD.31: CD-MUD → ciąg złożeń operacji rozciągania (rodzącej chaotyczność ewolucji orbit) oraz operacji składania (rodzącej możliwości wystąpienia chaosu).

DCD.32: CD-UD → zjawisko (opisywane w analizach z mechaniki statystycznej) nieprzewidywalnych zachowań UD wynikających z faktu mieszalności (np. płynów) oraz istnienia dużej liczby rozpraszających sztywnych ciał na drodze ruchu cząstek płynu.

DCD.33: CD-UD → geometryczny obraz dziwnego atraktora, repelera, siodeł, fraktali, „języków" Arnolda, katastrofalnych bifurkacji.

DCD.34: CD-UD, MUD → wykładnicza rozbieżność orbit jako efekt rezonansów zwiększających wrażliwość przebiegu orbit startujących z punktu $\left(x_0, x_0^{ps}, \dot{x}_0^{ps}\right)$ lub jego małych otoczeń.

DCD.35: CD-UD, MUD → objaw złożonych splotów wiązek orbit w PF w formie jakby losowego procesu wyników pomiaru cech ilościowych, np. objaw spiralności.

DCD.36: CD-Im(UD, MUD) → geometryczny obraz dysharmonii widocznej w stacjonarnym spektrum mocy (prawy róg wykresu mocy), któremu to wykresowi w rzeczywistych UD towarzyszy sztywność wewnętrznej struktury powiązań UD.

DCD.37: CD-Im (MUD) → teoretyczna mieszanka dziwnych niestacjonarnych długookresowych przebiegów $orb(X^{ps})$ [w modelowych PF dyssypatywnych rzeczywistych UD postrzeganych zmysłem wzroku wspomaganym czujnikami] w formie zaznaczanych obszarów przechwytu orbit, które to obszary łatwo rozopoznaje się dzięki doświadczeniu w odczytach pomiarów lub wykresów.

DCD.38: CD MUD → dziwna złożona struktura zbioru orbit towarzyszących stałym stanom UD, MUD, będąca efektem operacji prostego rozciągania, składania, tj. ergodycznego mieszania dynamicznych stanów obserwowanego lub analizowanego procesu pomiarów lub wyników symulacji.

DCD.39: CD-UD nieliniowego lub MUD – nieliniowego → zbiór nieregularnie zmieniających się wielkości $\left(x(t), \dot{x}(t)\right)$ cechujących stany UD, którego ewolucję opisuje model MUD ruchu UD z orbitami nie tworzącymi w PF żadnego pojedynczego i regularnego geometrycznego obiektu jak np. okręgu, koła, torusa, sześcianu) lecz tworzącymi zbiory o kształtach fraktalnych silnie zależnych od $\left(x(0), \dot{x}(0)\right)$.

DCD.40: CD-UD → nieprzewidywalne zjawisko szczególnych ewolucji orbit ruchu ciał lub ich cząstek albo cecha dziwnych przebiegów modelowych orbit $\left(\hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)\right)$ związanych z badanym UD.

DCD.41: CD-UD → zbiór wartości wychyleń nieregularnych względem rzeczywistych stanów równowagi albo zbiór nieregularnych wartości wychyleń względem modelowych rozwiązań teoretycznych stanów równowagi.

DCD.42: CD-MUD → trwały lub przejściowy obraz ewolucji orbit punktów niezmienniczych zbiorów PF spowodowany globalnymi lub lokalnymi bifurkacjami orbit.

DCD.43: CD-MUD → własność modelu matematycznego Duffinga generującego obraz chaotycznego ruchu dla ustalonych punktów początkowych i teoretyczny chaos generowany przy krytycznych wartościach parametrów MUD.

DCD.44: CD-MUD → własność modelu matematycznego spełniającego kryterium Mielnikowa o globalnych bifurkacjach homoklinicznego siodła centralnego.

DCD.45: CD-MUD, UD → własność bezładu ewolucji orbit modelu, UD spowodowana istnieniem połączeń elementów MUD lub UD.

DCD.46: CD-MUD → cecha dziwności geometrycznego obrazu skutków stosowania odwzorowań przesunięć Bernoulliego, logistycznego, namiotowego, podwojeń okresu, podkowy Smale'a.

DCD.47: CD-MUD → nieokresowe, niezbieżne do cyklu dowolnego okresu, niestabilne, względem małych odchyleń od punktów $x_o, \dot{x}_o$, zachowanie rozwiązań modelu, tj. ergodyczne lub prawie ergodyczne zachowanie $\{\hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)\}$.

DCD.48: CD-UD, MUD → to cecha mocnego chaosu UD, MUD – mocnej ergodyczności (gdy nieokresowe orbity wystąpią z dodatnim prawdopodobieństwem dla losowo wybranych punktów początkowych orbit albo słabego (cienkiego) chaosu gdy istnieją asymptotyczne zbieżne cykle.

DCD.49: CD-MUD → cecha numerycznych rozwiązań zwykłych równań różniczkowych (ZRR) polegająca na rosnącym splątaniu całek ruchu (rozwiązań) gdy skala splątania jest większa od skali rozdzielczości wyników obserwacji.

DCD.50: CD-MUD → cecha rozwiązań MUD gdy okres częstości fal w węzłach szybko maleje i jest porównywalny z okresami próbkowania.

DCD.S51: CD-SUD → cecha nieprzewidywalnego zachowania chaotycznych stochastycznych UD pośrednia między zachowaniem UD odpowiadającym MUD-ZRR całkowych, a MUD-SZRR dla stochastycznych ZRR.

DCD.52: CD-UD, MUD → cecha UD, MUD ograniczająca dokładność prognoz orbit, prognoz cech UD, MUD, własności numerycznych rozwiązań ZRR, CRR (cząstkowych RR).

DCD-53: cecha MUD-ZRR, że istnieją takie obszary wartości parametrów, które generują dziwne orbity lub ich zbiory.

DCD.54: CD-MUD → efekt procesu reakcji MUD na przekształcenia: translacji, skalowania, translacji i skalowania, potęgowania, logarytmowania, związania, rozciągania, składania, ortogonalizacji, skrętów krzywizn.

DCD.55: CD-MUD → to taki Im(MUD), który ma nieregularny, niemonotoniczny, złożony, nieokresowy kształt z rozbiegającymi się orbitami, bez centrów, cykli granicznych z erratycznymi obrazami szeregów czasowych $X(t)$ dla $\dot{X}(t)$ i $X(t)$ zachowującymi się jak losowe szeregi czasowe.

DCD.56: CD-MUD → to zbiór(y) odskakujących od siebie orbit modelowych z nieprzeliczalnymi podzbiorami orbit bez punktów okresowych.

DCD.57: CD-UD → źródło dynamicznej jakby losowości zachowań UD wywołane zarówno nieliniowymi sprzężeniami ciągłymi i przerywanymi elementów UD jak i losowym oddziaływaniem otoczenia UD, a szczególnie losowym rozłożeniem centrów (sztywnych ciał) rozpraszania ruchu elementów UD.

Podane określenia nie wyczerpują listy możliwych określeń chaosu deterministycznego. Stanowią naszą syntezę lub drobne modyfikacje jawnych lub niejawnych poglądów nt. chaosu. Każdemu temu określeniu łatwo przypisać treść pojęcia chaotyczności związanej z daną formą deterministycznego chaosu.

Z uwagi na objętość pracy część poświęconą formalnym definicjom CD odpowiednio skrócimy do trzech definicji:

DCD.58 (Devaney): CD-MUD-*f* → taki zbiór orbit funkcji f: D → D, $D \subset R^n$, $orb(x) \equiv f^n(x) = f(f(\ldots f(x)\ldots))$, że f jest chaotyczna jeśli: 1) f jest tranzytywna, tj. $\forall$ niepustego, otwartego $U, V \subset D \exists k > 0$ z $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$; 2) zbiór punktów okresowych funkcji f jest w D gęsty oraz 3) f ma cechę wrażliwej zależności od warunków początkowych, tj. $\exists \delta > 0$, $\delta = \delta(D, f)$, że $\forall U \subset \exists u_i, u_j \in U$, dla których iterandy $f^k(u_i)$, $f^k(u_j)$, spełniają warunek $|f^k(u_i) - f^k(u_j)| > \delta$.

DCD.59 (Banks i in.): CD-MUD-f jest chaotyczna jeśli zachodzą tylko warunki (1) i (2) z Def. Devanaya.

DCD.60 (Vellekoop, Berklund): CD-MUD-f jest chaotyczna, jeśli zachodzi tylko warunek (1) z Def. Devanaya.

Podane definicje świadczą o dużej różnorodności sposobów rozumienia pojęć chaosu i chaotyczności jako cechy procesów ontycznych lub wirtualnych. Panuje moda, zresztą zrozumiała na gruncie stale rozpowszechnianych medialnie prądów ideologii dekonstrukcji historycznych znaczeń pojęć, terminów i słów języka potocznego – lansowania starych słów w nowych znaczeniach. Tworzy to sytuacje, w których młodą generację naukowców nie dziwią takie zwroty jak: porządek w chaosie, chaos w porządku, chaotyczność znaczeń słów.

4. ZAKOŃCZENIE

Artykuł stanowi próbę wskazana czytelnikowi historycznego rozwoju sposobów rozumienia niezwykle dziś popularnych pojęć losowości, chaosu i chaotyczności.

Z dokonanego przeglądu ujęć znaczeń tych terminów widać, iż oba pojęcia są bardzo pojemne treściowo. Stanowią one szyldy-znaki informujące nas i ostrzegające o całkowitym lub częściowym braku wiedzy o rzeczach poddawanych opisowi i analizie. Jeśli trwający postęp w produkcji nowych urządzeń pomiarowych, telekomunikacji i mocy obliczeniowych utrzymają się, wówczas można przypuścić, że tradycyjne rozumienie stochastyki i chaosu także ulegnie zmianie i pojawią się nowe pojęcia opisu i analizy.

Uniwersytet Łódzki

LITERATURA

[1] Andronow A., (1929), Applications of Poincare's Theorem on Bifurcation Points, Comptes Rendus de *l'Académie* des Sciences, 189 (15), 559.

[2] Arnold L., (2003), *Random Dynamical Systems*, Springer, Berlin.

[3] Arnold V, (1965), Small Denominators I, *American Mathematical Society*, Ser. 2, 46, 213–284.

[4] Awrejcewicz J., (2007), *Matematyczne modelowanie systemów*, WNT, Warszawa.

[5] Banasiak J., Lachowicz M., (2002), Topological Chaos for Birth-and-Death-Type Models with Proliferation, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 12, 6, 755–775.

[6] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G., Stacey P., (1992), On Devaney's Definition of Chaos, *The American Mathematical Monthly*, 99, 332–334.

[7] Birkhoff G., (1927), Dynamical Systems, *American Mathematical Society Coll. Publ.*, 9.

[8] Borowkow A., (1986), *Tieorja Wierojatnostiej*, Nauka, Moskwa.

[9] Cardano G., (1550), *Liber de Ludo Aleae*.

[10] Chaitin G., (1966), On the Length of Programs, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 13, 547–569.

[11] Crannell A., (1995), The Role of Transitivity in Devaney's Definiction of Chaos, *American Mathematical Society*, 102, 788–793.

[12] Church A., (1940), On the Concept of a Random Sequence, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46 (2), 130–135.

[13] Cvitanović P., (1984), *Universality in Chaos*, A. Hilger, Bristol.

[14] Day R., (1999), *Complex Economic Dynamics*, MIT Press, Cambridge Mass, Vol. 1, 2.

[15] Deleuze G., (1997), *Różnica i powtórzenie*, Warszawa.

[16] Duhem P., (1906), *La Theorie Physique*, Paryż.

[17] Devaney B., (1989), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison Wesley.

[18] Dorfman J., (2001), *Wprowadzenie do teorii chaosu*, PWN, Warszawa.

[19] Eckman J., (1981), *Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems*, *Review of the Mathematical Physics*, 643–656.

[20] Falconer K., (1990), *Fractal Geometry*, Wiley, N.Y.

[21] Feigenbeum M., (1980), The Transition to Aperiodic Behavior in Turbulent Systems, *Communications in Mathematical Physics*, 77, 65.

[22] Fomin S., Kornfeld I., Sinaj J., (1987), *Teoria ergodyczna*, PWN, Warszawa.

[23] Gleick J., (1996), *Chaos*, Zysk i Spółka, Poznań.

[24] Grassberger P., Procaccia I., (1983), Measuring the Strangeness of Strange Attractors, *Physica*, 189–208.

[25] Hadamard J., (1898), Les Surfaces à Courbures Opposées et Leurs Lignes Géodésiques, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 27–74.

[26] Hellwig Z., Antoniewicz R., Miszczak W., (1981), Idealne rozkłady zmiennych losowych, *Przegląd Statystyczny*, 28, (3/4), 157–180.

[27] Hellwig Z., Puzdrowska B., Smoluk A., (1983), Losowość i niezależność, *Przegląd Statystyczny*, 30, (3/4), 179–187.

[28] Kendall M., Buckland W., (1975), *Słownik terminów statystycznych*, PWE, Warszawa.

[29] Kołmogorow J., (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer-Verlag, Berlin.

[30] Kołmogorow A., (1963), On Tables of Random Numbers, *Sankhya, Ser. A*, 25 (N4), 369–376.

[31] Kołmogorow A., (1965), Tri Podchoda k Opredelenju Ponjatya „Koliczestwo Informacji", *Problemy Peredaczi Informacyi*, 3–11.

[32] Kołmogorow A., (1957), *General Theory of Dynamical Systems*, Proceedings of 1994 International Congresss of Mathematicians, 315, North Hollans.

[33] Kryłow N., Bogoliubow N., (1947), *Introduction to Nonlinear Mechanics*, Princeton, Universiity NJ.

[34] Kryłow N., (1979), *Works on the Foundations of Statistical Mechanics*, PUP Princeton, NY.

[35] Kudrewicz J., (1993), *Fraktale i chaos*, WNT, Warszawa.

[36] Kravtson Y., Kadtke J., (red.), (1996), *Predictability of Complex Systems*, Springer, Berlin.

[37] Kulenović M., Merino O., (2002), *Discrete Dynamical Systems and Differential Equations with Mathematica*, Chapman and Hall, London.

[38] Lachowicz M., (1999), *Matematyka Chaosu*, Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie, OKM, 22, 21–28.

[39] Lasota A., Mackey M., (1994), *Chaos, Fractals and Noise*, Springer, Berlin.

[40] Lorenz E., (1963), Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciencies*, 20, 130–141.

[41] Lorenz E., (1993), *The Essence of Chaos*, UWP, Seattle.

[42] Lorenz H., (1997), *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer, Berlin.

[43] Łomnicki A., (1923), Nouveaux Fondements du Calcul des Probabilities, *Fundamenta Mathemathica*, 4, 34–71.

[44] Łukasiewicz J., (1913), Die Logischen *Grundlagen der* Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kraków.

[45] MacEachern S., Berliner L., (1993), Aperiodic Chaotic Orbit, *The American Mathematical Monthly*, 100, 237–241.

[46] Mandelbrot B., (1997), *Fractales, Hasard et Finance*, Flammarion, Paryż.

[47] Martin-Löf P., (1966), The Definition of Random Sequences, *Information and Control*, 9 (6), 602–619.

[48] Mazurkiewicz S., (1933), Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung I, *Com- ptes Rendus de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie*, 343–352.

[49] Medio A., Gallo G., (1993), *Chaotic Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.

[50] Milo W., (2012), *Randomness and Chaocity*, nieopublikowany maszynopis – UŁ.

[51] Milo W., (2013), *Uwagi o losowości i chaosie*, artykuł zgłoszony do WUE, Poznań.

[52] Mises R., (1957), *Probability, Statistics and Truth*, Dover Publ. N.Y.

[53] Morrison J., (1996), *Sztuka modelowania układów dynamicznych*, WNT, Warszawa.

[54] Neumann J., (1932), *Proof of the Quasi-Ergodic Hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 18, 70–82.

[55] Nowak R., (2002), *Statystyka dla fizyków – ćwiczenia*, PWN, Warszawa.

[56] Orzeszko W., (2005), *Identyfikacja i prognozowanie chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych*, seria: Nowe Trendy w Naukach Ekonomicznych, Fundacja Promocji i Akredytacji Kierunków Ekonomicznych, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Warszawa.

[57] Orzeszko W., Kwiatkowski J., (2004), Wykładnik Lapunowa – narzędzie identyfikacji chaosu na WGPW, *Przegląd Statystyczny*, 51 (1), 85–96.

[58] Osiewalski J., (2001), *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo AE w Krakowie.

[59] Ostasiewicz S., Ronka-Chmielowiec W., (1994), *Metody statystyki ubezpieczeniowej*, Wydawnictwo AE Wrocław.

[60] Ott E., (1997), *Chaos w układach dynamicznych*, WNT, Warszawa.
[61] Peitgen H., Richter P., (1986), *The Beauty of Fractals*, Springer, Berlin.
[62] Perzanowski J., (1995), *Byt, Logos, Matematyka*, FLFL, Wyd. UMK Toruń, 408.
[63] Poincare H., (1908), *Science et Method*, Flammearation Paryż.
[64] Pomeau Y., Manneville P., (1980), Intermittent Transition to Turbulence, *Communication of the Mathematical Physics*, 189–197.
[65] Rasband S., (1990), *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*, Wiley, N.Y.
[66] Prochorow J., Rozanow J., (1972), *Rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa.
[67] Ruelle D., (1989), *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, CUP, Cambridge.
[68] Ruelle D., (1990), *Deterministic Chaos*, Proceedings of the Royal Society London, 427, 241–248.
[69] Ruelle D., Takens F., (1971), On the Nature of Turbulance, *Communications in Mathematical Physics*, 20, 167–192.
[70] Schnorr C., (1997), A Survey of the Theory of Random Sequences, w: Butts, R. E., Hintikka, J. (red.), *Basic Problems in Methodology and Linguistics*, 193–211.
[71] Schuster H., (1995), *Chaos deterministczny*, PWN, Warszawa.
[72] Sękowski T., (2007), *Zagadnienia matematycznej teorii chaosu*, UMCS, Lublin.
[73] Sierpiński W., (1919), Sur Une Definition Axiomatique des Ensembles Mesurables (L), *Bulletin des Sciences de l'Academie de Cracovie*, 173–178.
[74] Sinai Y., (1959), *On the Concept of Entropy of a Dynamical System*, Doklady Akademii Nauk SSSR124:768–771.
[75] Sinai Y., (1976), Introduction to Ergodic Theory, *Mathematical Notes*, 18, PUP, NJ.
[76] Shaw R., (1981), Strange Attractors, Chaotic Behavior & Information Flaw, *Zeitschrift für Naturforschung, A.* 80.
[77] Smoluchowski M., (1923), Uwagi o pojęciu przypadku w zjawiskach fizycznych, *Wiadomości Matematyczne*, 27, 27–52.
[78] Solomonoff R., (1964), A Formal Theory of Inductive Inference, Part I, *Information and Control* , 7, 1–22.
[79] Steinhaus H., (1923), Les Probabilités Dénombrables et Leur Rapport à la Théorie de la Mesure, *Fundamenta Mathematica* , 4, 286–310.
[80] Stewart I., (1995), *Czy Bóg gra w kości*, PWN, Warszawa.
[81] Thompson J., Stewart H., (2002), *Nonlinear Dynamics & Chaos*, Wiley, N.Y.
[82] Takens F., (1979), Forced Oscillations & Bifurcations, *Communications Mathematical Institute Rijksuniv*, Utrecht, 3,1–59.
[83] Touhay P., (1997), Yet Another Definition of Chaos, *The American Mathematical Monthly*, 104 (5), 411–414.
[84] Tu P. N. V., (1994), *Dynamical Systems – An Introduction with Applications in Economics and Biology*, 2e. Springer, Berlin.
[85] Verhulst F., (2000), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, N. Y.
[86] Vellekoop M., Berglund R., (1994), *On Intervals, Transitivity = Chaos, The American Mathematical Monthly*, 101 (4), 353–355.
[87] Wiggins S., (2003), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer N. Y.
[88] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., Vastano, J. A., (1985), Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica D*, 16, 285–314.
[89] Zawadzki H., (1996), *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Prace Naukowe AE Katowice.
[90] Zawadzki H. (red.), (2006), *Zbiory graniczne i atraktory w modelach ekonomii matematycznej*, Prace Naukowe AE Katowice.
[91] Zawadzki H., (2012), *Atraktory w modelach równowagi i wzrostu gospodarczego*, Wyd. Placet, Warszawa.

[92] Zieliński Z., (1989), Podstawowe problemy teorii przyczynowej zależności procesów ekonomicznych, *Acta Universitatis Nicolai Copernici Ekonomia*, Z. 20, 7–23.
[93] Zieliński Z., (1992), Podstawy stochastycznej teorii przyczynowej zależności zdarzeń ekonomicznych, *Acta Universitatis Nicolai Copernici Ekonomia*, Z. 18, 5–25.

LOSOWOŚĆ A CHAOTYCZNOŚĆ

S t r e s z c z e n i e

Celem artykułu jest przeglądowe omówienie ontologicznych i metodologicznych podstaw pojęć losowości i chaotyczności, a także ich form i stopni. Artykuł stanowi próbę syntezy różnych ujęć tej tematyki, które to ujęcia były przedmiotem licznych artykułów, książek z dziedziny, m.in. filozofii, matematyki, zastosowań matematyki, statystyki i ekonometrii.

Słowa kluczowe: losowość, chaotyczność, kryteria losowości, kryteria chaotyczności, chaos

RANDOMNESS AND CHAOSITY

A b s t r a c t

The paper is aimed at presenting ontological and methodological grounds of randomness and chaosity concepts, as well as, considering their forms and degrees. There were made some efforts to make a synthesis of different approaches to the analysis of these concepts.

Keywords: randomness, chaos, chaosity, chaosity criteria, randomness criteria