

SIECI NEURONOWE I POLICHOTOMICZNE MODELE ZMIENNYCH JAKOŚCIOWYCH W ANALIZIE RYZYKA KREDYTOWEGO

PAWEŁ BASTER

e-mail: pabaster@gmail.com

KATARZYNA POCZTOWSKA

e-mail: k.pocztowska@gmail.com

Praca została przedstawiona przez autorów 9 lipca 2010 r. na sesji *Współczesna ekonometria w badaniach empirycznych młodych ekonomistów*, którą zorganizowały: Komisja Nauk Ekonomicznych Polskiej Akademii Umiejętności, Komisja Nauk Ekonomicznych i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie, Katedra Ekonometrii i Badań Opreacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

ABSTRACT

P. Baster, K. Pocztońska. *Neural networks and models for polychotomous ordered data in credit risk analysis*. Folia Oeconomica Cracoviensia

Management of credit risk, one of the main bank activities, is currently a very important issue. This paper contains comparison of two instruments used in prediction of probability that consumer fails to fully repay a loan in agreed time: artificial neural networks and models for polychotomous ordered data. For the empirical research each client has been assigned to one of four categories reflecting his/her delay in payments. Estimation and validation of methods was performed on a 3000-item sample containing information about each loan agreement and repayment history originating from one of Polish banks, covering years 2000–2001. The dataset was repeatedly divided into train and validation sets. Multi-layer architecture of artificial neural network with logistic activation function was proposed. Ordered logit and probit models were estimated within maximum likelihood framework. Several alternative specifications were proposed differing in independent variable set (including their products and squares). Bank income was chosen as the main criterion of fitness. Problem of optimal decision and defining appropriate loss function was formulated on the basis of statistical decision theory. Furthermore, properties of estimated models related to inference about probability of repayment and credit risk factors were presented.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

credit risk, ordered logit, ordered probit, artificial neural networks

ryzyko kredytowe, wielomianowe modele zmiennych jakościowych, sieci neuronowe

1. RYZYKO KREDYTOWE — WPROWADZENIE

Ryzyko stanowi nieodłączny element działalności banku. W literaturze definiuje się je jako zagrożenie wynikające z nietrafnych decyzji bądź jako możliwość wystąpienia efektu niezgodnego z oczekiwaniami. W przypadku działalności kredytowej jest to niebezpieczeństwo niedotrzymania warunków umowy przez kredytobiorcę, który nie spłaca całości lub części kwoty kredytu i odsetek (Krysiak 2006).

Z punktu widzenia banku niespłacanie kredytów powoduje zmniejszenie potencjalnych zysków i konieczność tworzenia rezerw celowych zabezpieczających wkłady deponentów, co w ostateczności może skutkować utratą płynności i wiarygodności, a nawet bankructwem. Dlatego też zarządzanie ryzykiem jest tak ważną sferą funkcjonowania banku. Istotą działań w tym obszarze jest identyfikacja i pomiar ryzyka. Najczęściej przyjmowaną miarą są prawdopodobieństwa spłaty kredytu przez konkretnych klientów wyznaczane za pomocą odpowiednich metod. Do najpopularniejszych należą: analiza dyskryminacyjna, modele zmiennych jakościowych, systemy eksperckie, sieci neuronowe, data mining. Banki stosują różne procedury, a ich skuteczność może stanowić o sile i konkurencyjności na rynku. Wykorzystywane narzędzia powinny pozwalać też na wyznaczenie determinant ryzyka i podjęcie decyzji kredytowej (Gruszczynski 2001). Najistotniejszym dla banku kryterium porównawczym jest jednak wielkość zysku finansowego wynikającego z zastosowania poszczególnych metod na etapie udzielania kredytów.

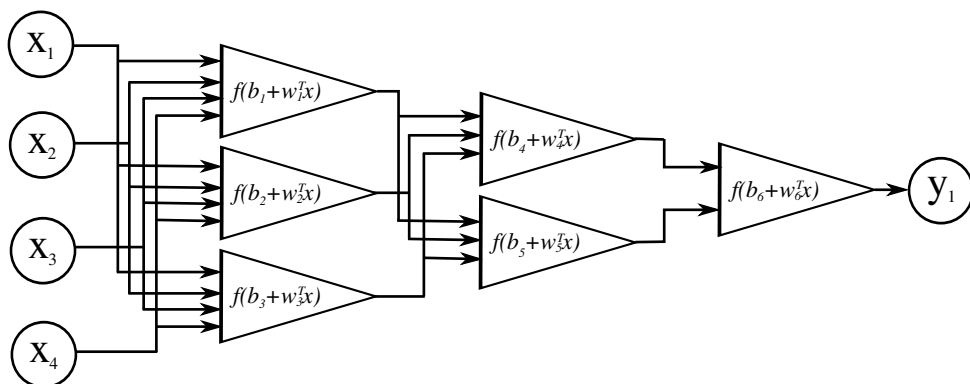
Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy są dwa narzędzia stosowane w analizie ryzyka kredytowego: sieci neuronowe i polichotomiczne modele zmiennych jakościowych.

2. SIECI NEURONOWE

Przez *sztuczne sieci neuronowe* rozumiemy systemy przetwarzania danych symulujące uczenie się struktury mózgu (PWN 1996). Inna definicja głosi, że sieć neuronowa to uproszczony model mózgu, składający się z pewnej liczby elementów nazywanych sztucznymi neuronami, które przetwarzają informacje. *Sztuczne neurony* to uproszczone modele neuronów biologicznych, których parametry (nazywane wagami) decydują o własnościach sieci i podlegają optymalizacji w trakcie procesu nazywanego uczeniem (Tadeusiewicz 1993). Z matematycznego punktu widzenia, sieci neuronowe to modele regresyjne oparte na pewnej klasie sparametryzowanych funkcji nieliniowych, których parametry szacuje się zwykle metodami nieparametrycznymi.

W opisywanym badaniu wykorzystana została typowa architektura sieci wielowarstwowej jednokierunkowej z logistyczną funkcją aktywacji. Ta klasa sieci

jest w stanie odwzorować każdą funkcję ciągłą określoną na ograniczonym zbiorze z dowolną dokładnością (Cybenko 1989). Na rysunku 1 przedstawiony został schemat sieci tego typu. W sztucznym neuronie oblicza się ważoną sumę wejść, która jest następnie normowana przez funkcję logistyczną. Neurony ułożone są w warstwy (zwykle nie więcej niż trzy), które kolejno i równoległe przetwarzają zmienne wejściowe. Wartości generowane przez ostatnią warstwę sieci interpretowane są jako wartości wyjściowe — odpowiedź modelu.



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 1. Schemat sieci wielowarstwowej jednokierunkowej

Uczenie sieci to optymalizacja wag w sensie pewnej funkcji celu (najczęściej jest to minimalizacja błędu średniokwadratowego). Ocena efektywności sieci zwykle odbywa się przez testowanie jej działania na danych nie biorących udziału w optymalizacji — tzw. zbiorze testowym, stanowiącym zazwyczaj 10–20% całego zbioru obserwacji, podczas gdy dane biorące udział w uczeniu nazywane są zbiorem uczącym. Dopasowanie sieci do danych uczących rośnie wraz ze wzrostem liczby neuronów, lecz po początkowym wzroście zwykle spada dla danych testowych, gdyż sieć zaburzona przez przypadkowy szum w danych uczących będzie gorzej generalizować wyuczone zależności na nieobserwowane przypadki. Dla poprawy zdolności aproksymacyjnych sieci do funkcji celu dodaje się czasem wyraz penalizujący modele z wyższymi wartościami bezwzględnych wag. Do konstrukcji sieci, estymacji modelu i generowania prognoz opartych o sztuczne sieci neuronowe wykorzystuje się także czasem metody wnioskowania bayesowskiego (Lee 1999).

3. POLICHOTOMICZNE MODELE ZMIENNYCH JAKOŚCIOWYCH DLA KATEGORII UPORZĄDKOWANYCH

Polichotomiczne modele zmiennych jakościowych dla kategorii uporządkowanych (ang. multinomial response, polychotomous, multiple-choice models) to klasa modeli ekonometrycznych, w których zmienna endogeniczna ma dyskretny rozkład prawdopodobieństwa i przyjmuje więcej niż dwie wartości mierzone na skali porządkowej.

Ogromny wkład w rozwój tych modeli wnieśli D.L. McFadden i J. Heckman, którzy w 2000 r. za rozwój metodologiczny i zastosowanie modeli dyskretnego wyboru w praktyce otrzymali nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii. Konstrukcja modelu jest następująca (McKelvey, Zavoina 1975).

Niech y_1, \dots, y_T będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o dyskretnym rozkładzie. Zakładamy, że przyjmują one z ustalonym prawdopodobieństwem p_{ij} wartości j , gdzie $j = 1, 2, \dots, M$ dla każdego t .

Zależność między $\{p_{ij}\}_{j=1}^M$ a wektorem zmiennych objaśniających $X = (x_1, \dots, x_K)$ wprowadza się przy pomocy nieobserwowalnej ciągłej zmiennej z_t , która według proponowanej w literaturze interpretacji reprezentuje stochastyczną funkcję użyteczności decydenta wybierającego spośród możliwych kategorii zmiennej y_t .

Wartości z_t determinują obserwowaną kategorię zmiennej y_t w następujący sposób:

$$\begin{cases} z_t = X_t B + e_t, \\ y_t = j \Leftrightarrow \alpha_{j-1} < z_t \leq \alpha_j, \end{cases}$$

dla $j = 1, \dots, M$ i $t = 1, \dots, T$.

W powyższym modelu zmienne losowe e_t są niezależne o znanym jednakowym rozkładzie (z zerową wartością oczekiwaną i znaną skończoną wariancją) i odpowiadają za wszelkie losowe zakłócenia. Jeśli jest to rozkład logistyczny to model nazywamy *logitowym*, a jeśli normalny to model określa się mianem *probitowego*.

(B, A) stanowi wektor parametrów podlegających estymacji za pomocą metody MNW. Składowe wektora $A = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_T)$ noszą nazwę *punktów ucięcia*. W celu zapewnienia identyfikowalności uwzględniamy w B wyraz wolny β_0 i ustalamy: $\alpha_0 = -\infty, \alpha_1 = 0, \alpha_M = +\infty, .$

Dla obserwacji charakteryzującej się wektorem zmiennych niezależnych X_T prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną zależną y_t kategorii j (dla $j = 1, \dots, M$) można zapisać jako:

$$p_{tj} = \Pr(Y_t = j) = \Pr(\alpha_{j-1} < z_t < \alpha_j) = F(\alpha_j - X_t B) - F(\alpha_{j-1} - X_t B),$$

gdzie $A(\cdot)$ to dystrybuanta rozkładu zmiennych e_t .

Oznaczmy jako $W = (w_1, \dots, w_n)$ wektor wyjściowych zmiennych objaśniających reprezentujących określone interpretowalne cechy. Wtedy X_t może być wektorem dowolnych funkcji elementów W_t pod warunkiem, że są liniowe względem parametrów B . Jeżeli część regresyjna modelu ma postać $W_t B$ to taką specyfikację nazywamy *modelem I rzędu*. Jeżeli X_t jest wielomianem drugiego stopnia zmiennych z W_t to model jest *II rzędu*. Przyczyną wprowadzenia specyfikacji II rzędu jest jej zdolność do lepszej aproksymacji dowolnej funkcji zmiennych W_t i parametrów B , występującej potencjalnie w miejscu wyrażenia $X_t B$. Modele II rzędu wykazują tym samym lepsze własności w zakresie modelowania wpływu zmiennych wyjściowych na prawdopodobieństwa p_{ij} .

4. CHARAKTERYSTYKA DANYCH

Zbiór obserwacji składał się z 3000 rachunków kredytowych otwartych w okresie od 01.01.2000 do 30.09.2001. Dane pochodziły z polskiego banku komercyjnego i były już wcześniej wykorzystywane w badaniach empirycznych (Marzec 2008).

Zmienna objaśniana przyjmuje cztery wartości reprezentujące kategorię kredytu w zależności od przedawnienia w spłacie. Do podziału kredytu na takie grupy banki były zobowiązane treścią obowiązującej w tym czasie uchwały (Uchwała nr 8/1999 Komisji Nadzoru Bankowego z 22 grudnia 1999 r.), która obligowała również do tworzenia rezerwy zabezpieczającej depozyty liczonej jako procent wartości kredytów z danej kategorii. Tabela 1 zawiera informacje dotyczące konstrukcji zmiennej objaśnianej, okres opóźnienia w spłacie kredytu, a także procent wartości kredytu jaki bank musiał odłożyć w postaci rezerw.

Tabela 1

Konstrukcja zmiennej objaśnianej

j	Kategoria należności	Wysokość rezerw	Opóźnienie w spłacie
1	normalne	–	poniżej 1 m-ca
2	poniżej standardu	20%	od 1 do 3 m-cy
3	wątpliwe	50%	od 3 do 6 m-cy
4	stracone	100%	powyżej 6 m-cy

Źródło: opracowanie własne.

Zbiór charakterystyk obserwacji składał się ze zmiennych opisujących:
 — kredytobiorcę: płeć (1-mężczyzna, 0-kobieta), wiek w latach, źródło dochodu — reprezentowany przez trzy pomocnicze zmienne binarne: dochód1

(1-renta, emerytura), dochód2 (1-własna działalność gospodarcza, umowa zlecenie i o dzieło), dochód3 (1-inne źródło np. stypendium), referencyjna wartość to umowa o pracę;

- dotychczasowe kontakty klienta z bankiem: posiadanie kart kredytowych (1-posiada, 0-nie posiada) i rachunku ROR (1-posiada, 0-nie posiada), a także wielkość kwartalnych wpływów na ROR w tys. zł;
- kredyt: kwota w tys. zł, okres w latach, typ (1-konsumpcyjny, 0-hipoteczny), waluta (1-obca, 0-krajowa), sposób przyznania (1-przez pośrednika, 0-przez bank).

W tabeli 2 przedstawiono rozkład poszczególnych zmiennych w próbie. Określono też wartości wszystkich zmiennych (na poziomie mediany) dla dwóch wyróżnionych klientów — typowego klienta pozyskanego przez bank lub przez pośrednika.

Tabela 2

Podstawowe ilościowe informacje o rachunkach kredytowych i ich właścicielach

Zmienna	Struktura	Typowy klient	
		Pośrednik=0	Pośrednik=1
<i>Płeć</i>	54%	1	1
<i>Wiek</i>	39 lat	39 lat	39 lat
<i>Wpływy</i>	2,4 tys. zł	2,4 tys. zł	2,4 tys. zł
<i>ROR</i>	57%	1	1
<i>Karty</i>	33%	0	0
<i>Pośrednik</i>	38%	0	1
<i>Typ</i>	94%	1	1
<i>Okres</i>	1,5 roku	1,5 roku	1,5 roku
<i>Kwota</i>	5 tys. zł	5 tys. zł	5 tys. zł
<i>Waluta</i>	3%	0	0
<i>Dochód 1</i>	17%	0	0
<i>Dochód 2</i>	7%	0	0
<i>Dochód 3</i>	2%	0	0

Źródło: opracowanie własne.

5. MODEL FUNKCJONOWANIA BANKU W KONTEKŚCIE PODEJMOWANIA DECYZJI KREDYTOWEJ

W celu szacowania korzyści finansowych z zastosowanych narzędzi należy określić zysk banku z pojedynczego klienta w zależności od decyzji kredytowej i kategorii kredytu. W literaturze (Osiewalski 2007, Marzec 2008) rozważa się to zagadnienie na gruncie statystycznej teorii decyzji. Oznaczmy przez m marżę banku, czyli różnicę w oprocentowaniu kredytów i depozytów. Bank podpisując umowę z solidnym kredytobiorcą może się spodziewać zysku w wysokości m (dla jednostkowej kwoty kredytu). Natomiast odmawiając ponosi koszty utraconych możliwości równe $-m$. Decyzja o przyznaniu kredytu, który nie będzie spłacany wiąże się z utratą pewnej części kapitału i odsetek. Należy więc przyjąć odpowiednie wagi dla poszczególnych kategorii należności. Zasadne wydaje się odwołanie do wielkości rezerw, które bank musi tworzyć w celu zabezpieczenia środków pozyskanych od deponentów. Zakładamy więc, że kredyty poniżej standardu nie będą spłacone w 20% (strata banku to $0,2(1 + m)$), kredyty zagrożone w 50% (strata to $0,5(1 + m)$), a stracone nie zostaną spłacone w całości (strata to $(1 + m)$). Powoduje to również, że bank zyskuje $0,8m$ lub $0,5m$ z kredytów odpowiednio drugiej i trzeciej grupy. W tabeli 3 zaprezentowano jak w tej sytuacji będzie się kształtował zysk ekonomiczny banku.

Tabela 3

Tabela wypłat zysku banku w zależności od kategorii kredytu i decyzji kredytowej

Decyzja	Kategoria kredytu			
	$j = 1$ normalny	$j = 2$ poniżej standardu	$j = 3$ wątpliwy	$j = 4$ stracony
Udzielić	m	$0,6m - 0,2$	$-0,5$	$-(1 + m)$
Odmówić	$-m$	0	0	0
Prawdopodobieństwo	p_{t1}	p_{t2}	p_{t3}	p_{t4}

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie oszacowanych dla konkretnego klienta prawdopodobieństw p_{t1} , p_{t2} , p_{t3} , p_{t4} , i funkcji wypłaty z tabeli 3 określimy optymalną regułę wskazującą jaką decyzja kredytowa jest dla banku opłacalna. Zakładamy, że przyznanie kredytu powinno nastąpić, kiedy przy ustalonej marży m oczekiwany zysk z udzielenia kredytu będzie większy od kosztów odmowy, co zachodzi, gdy spełniona jest nierówność:

$$mp_{t1} + (0,6m - 0,2)p_{t2} - 0,5p_{t3} - (1 + m)p_{t4} \geq -mp_{t1}$$

6. WYNIKI EMPIRYCZNE

Dla potrzeb porównania modeli wielokrotnie dzielono zbiór obserwacji na zbiór uczący (85%) i testowy (15%) i uzyskane na nich wyniki dla każdego z modeli uśredniano. Za miarę jakości modelu przyjęto średni zysk oraz medianę zysku z kredytu o wartości jednostkowej (w sensie funkcji wypłaty zdefiniowanej w tabeli 3), przy ustalonej stopie procentowej $m = 10\%$. Miara ta przyjmuje wartości pomiędzy -1 a $0,1$. Do porównania wybrano model logitowy i probitowy dla kategorii uporządkowanych oraz sztuczną sieć neuronową z wyrazem penali-zującym modele z wyższą sumą kwadratów wag. Estymację przeprowadzono za pomocą pakietu R. Jako zmienne objaśniane przyjęto znormalizowane wartości wszystkich dostępnych cech oraz dwie nieliniowe kombinacje tych zmiennych: *kwota/okres* (odpowiadająca w przybliżeniu wysokości raty kredytowej) oraz *kwota/okres/wpływy* (lub 1 jeśli wpływy wynosiły zero). Wyniki porównania po ponad dwustu iteracjach zaprezentowano w tabeli 4.

Tabela 4

Zysk z kredytu o wartości jednostkowej

	logit	probit	sztuczna sieć neuronowa
średnia	0,0267	0,0266	0,0255
mediana	0,0267	0,0266	0,026

Źródło: opracowanie własne.

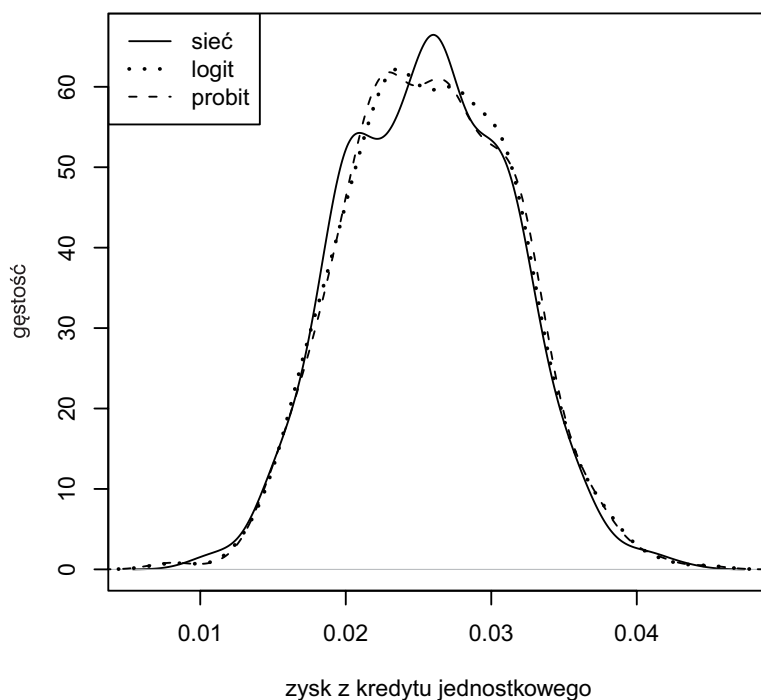
Wyniki porównano testem Wilcozona dla obserwacji zależnych otrzymując rezultaty przedstawione w tabeli 5 oraz wyrysowano ich rozkład za pomocą jądrowej estymacji gęstości (rysunek 2).

Tabela 5

P-value dla jednostronnych testów Wilcozona

$H_0: Me(A) = Me(B)$ vs $H_1: Me(A) \neq Me(B)$		
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>P-value</i>
logit	probit	0,0013
logit	sz. sieć neuronowa	$< 10^{-6}$
probit	sz. sieć neuronowa	$< 10^{-6}$

Źródło: opracowanie własne.



Źródło: opracowanie własne.

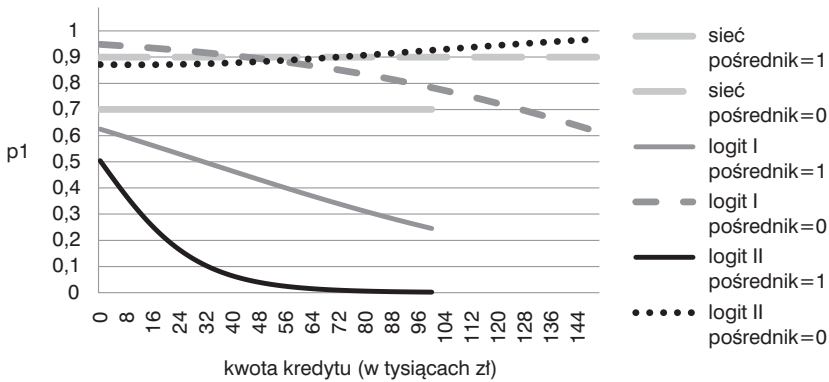
Ryc. 2. Jądrowa estymacja gęstości zysku

Wyniki te pokazują, że mimo minimalnych różnic w wartościach zysku, polichotomiczne modele zmiennych jakościowych dla kategorii uporządkowanych radziły sobie istotnie lepiej w ocenie ryzyka kredytowego niż sztuczne sieci neuronowe. Ponadto zaobserwowano, iż:

- jeżeli sztuczna sieć neuronowa korzysta ze wszystkich zmiennych objaśniających wówczas największy zysk generuje sieć składająca się tylko z jednego neuronu (co do postaci funkcyjnej równoważna modelowi logitowemu). Dodatkowe warstwy neuronów, będące źródłem elastyczności sztucznych sieci neuronowych i zwykle stanowiące o ich przewadze, w tym przypadku jedynie powodują pogarszanie wyników z powodu przeuczenia. Ograniczenie zbioru zmiennych objaśniających przez usuwanie zmiennych nieistotnych poprawia wyniki. Dla zredukowanego zbioru zmiennych wejściowych testy pokazują przewagę sieci z jedną warstwą ukrytą zawierającą 1–2 neuronów.
- Po ponad dwustu iteracjach nie można odrzucić hipotezy, że rozszerzenie modelu logitowego dwumianowego do modelu polichotomicznego dla kategorii uporządkowanych nie zmienia istotnie zysku (p -value dla testu Wilcoxon: 0,31). Test zdecydowanie odrzuca jednak analogiczną hipotezę dla modelu probitowego (p -value: $2 \cdot 10^{-22}$).

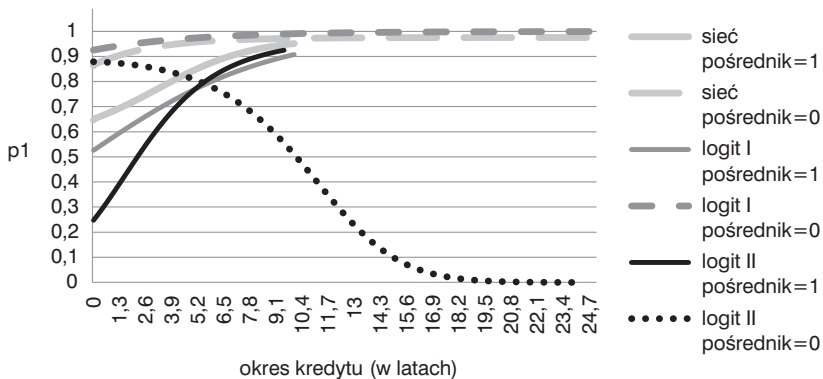
— Niewielka co do wartości zysku lecz istotna statystycznie przewaga modelu logitowego nad siecią neuronową (nawet o tylko jednym neuronie) sugeruje, że — wobec identycznych postaci funkcyjnych — różnica wynika z metod estymacji. Lepsze wyniki metod parametrycznych względem typowego dla sieci poszukiwania minimum błędu średniokwadratowego lub maksimum funkcji wypłaty sugerują zwrócenie się w kierunku prób wykorzystania metod parametrycznych do uczenia sieci neuronowych jako uogólnienia modelu logitowego. Stosowanie do tego celu metod wnioskowania bayesowskiego proponuje Herbert Lee (Lee 1999).

Na rysunkach 3–6 pokazano zależność między oszacowanym prawdopodobieństwem spłaty a wybranymi zmiennymi dla sieci neuronowych oraz modelu logitowego (I i II rzędu) oraz dla różnych wartości zmiennej *pośrednik*. Wartości pozostałych zmiennych objaśniających ustalone zostały na poziomie mediany ich wartości obserwowanych w próbie.



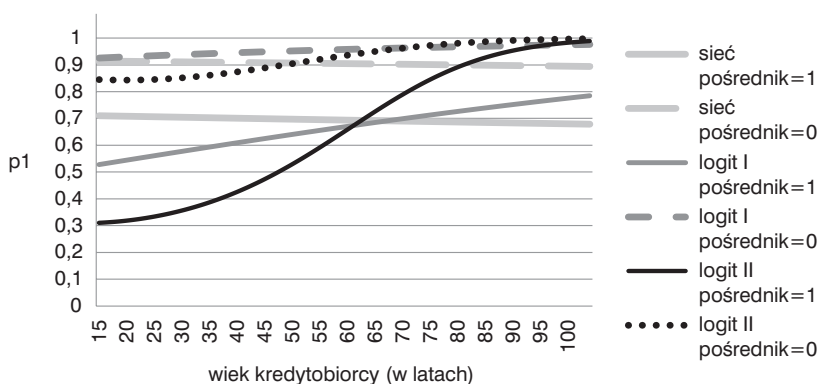
Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 3. Ocena prawdopodobieństwa spłaty w zależności od kwoty kredytu



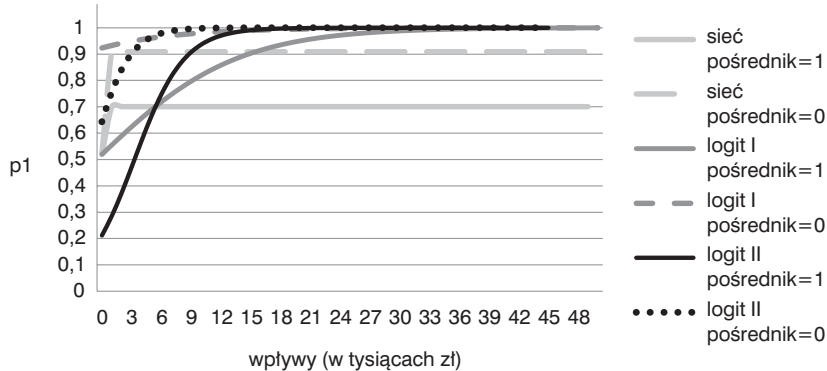
Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 4. Ocena prawdopodobieństwa spłaty w zależności od okresu spłaty



Źródło: opracowanie własne.

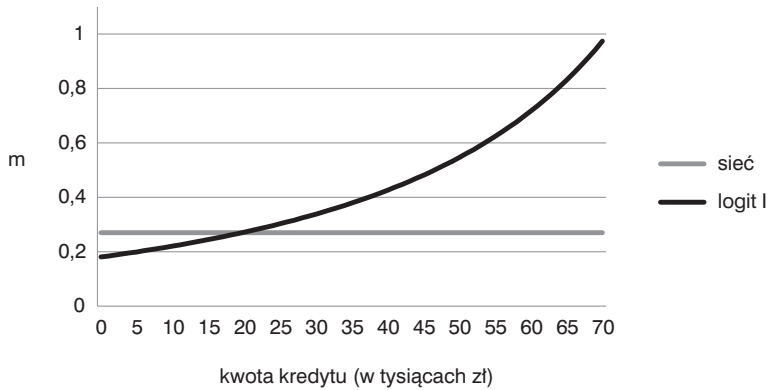
Ryc. 5. Ocena prawdopodobieństwa spłaty w zależności od wieku kredytobiorcy



Źródło: opracowanie własne.

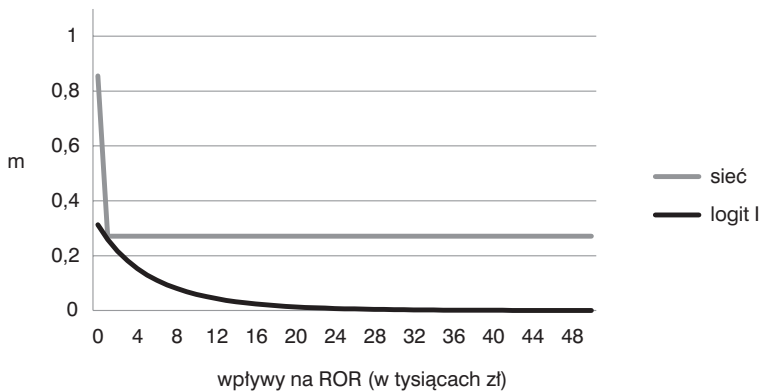
Ryc. 6. Ocena prawdopodobieństwa spłaty w zależności od kwartalnych wpływów na ROR klienta

Niektóre z tych zależności mogą służyć bankowi do zaproponowania klientom nowych warunków umowy, gdy ich podania zostały sklasyfikowane jako zbyt ryzykowne. W szczególności model może odpowiedzieć na pytanie o jaką kwotę lub o jaki okres spłaty może wnioskować klient, aby klasyfikator uznał jego szanse na terminową spłatę za wystarczające. Proponowane podejście może zostać wykorzystane w procedurze przyznawania kredytu z indywidualnym ustalaniem marży równoważącej oszacowane ryzyko umowy. Rysunek 7 i 8 pokazuje wysokości minimalnej marży zapewniającej bankowi zysk w długim okresie w zależności od kwoty kredytu oraz kwartalnych wpływów na rachunek ROR dla klienta, który stara się o kredyt przez pośrednika (pozostałe jego cechy przyjmują mediany wartości obserwowanych).



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 7. Minimalna marża w zależności od kwoty kredytu (w tys. zł)
(dla wniosków składanych przez pośrednika)



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 8. Minimalna marża w zależności od kwartalnych wpływów na ROR klienta
(dla wniosków składanych przez pośrednika)

7. PODSUMOWANIE

Formalne porównanie sieci neuronowych i polichotomicznych modeli zmiennych jakościowych pokazało, że — dla danych obserwacji — istotnie lepsze wyniki pod względem uzyskiwanego zysku dają modele zmiennych jakościowych. W pracy zaproponowano metodę wyznaczania zysku banku w zależności od decyzji kredytowej i kategorii analizowanego kredytu. Zaprezentowano też regułę, która przy danych prawdopodobieństwach spłaty kredytu (szacowanych

przez konkurencyjne modele) pozwala na podjęcie decyzji kredytowej i określenie gwarantujących przyznanie kredytu wartości zmiennych charakteryzujących konkretnego klienta bądź indywidualne wyznaczenie marży.

BIBLIOGRAFIA

- Cybenko G. 1989. *Approximations by superpositions of sigmoidal function*, Mathematics of Control, Signals and Systems 2, 303–314.
- Gruszczyński M. 2001. *Modele i prognozy zmiennych jakościowych w finansach i bankowości*, Monografie i Opracowania SGH 6, Warszawa.
- Krysiak Z. 2006. *Ryzyko kredytowe a wartość firmy. Pomiar i modelowanie*, Oficyna Wydawnicza, Kraków.
- Lee H. 1999. *Model Selection and Model Averaging for Neural Networks*, PhD thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA. <http://users.soe.ucsc.edu/~herbie/thesis.pdf>.
- Marzec J. 2008. *Bayesowskie modele zmiennych jakościowych i ograniczonych w badaniach niespłacalności kredytów*, Wydawnictwo UE w Krakowie, Kraków.
- Osiewalski J. 2007. *Bayesowska statystyka i teoria decyzji w analizie ryzyka kredytu detalicznego* [w:] *Finansowe warunkowania decyzji ekonomicznych*, Krakowska Szkoła Wyższa im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego, Kraków.
- Petrozolin-Skowrońska B. 1996. *Neronowe sieci*. [w:] *Nowa Encyklopedia Powszechna PWN*, t. 4, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 439.
- McKelvey R.D., Zavoina W. 1975. *A Statistical Model for the Analysis of Ordinary Level Dependent Variables*, Journal of Mathematical Sociology 4, 103–120.
- Tadeusiewicz R. 1993. *Sieci Neuronowe*, Akademicka Oficyna Wydawnicza, Kraków.