FILOZOFIA I NAUKA
Studia filozoficzne i interdyscyplinarne
Tom 2, 2014

Andrzej Wilk[1]
Instytut Filozofii i Socjologii PAN

CHAOS A NIEOBLICZALNOŚĆ

STRESZCZENIE

Tekst jest poświęcony problemowi implementacji nieobliczalności w świecie realnym. Podstawowe pytanie jest takie: czy logiczna nieefektywność ma swoją realizację w świecie fizycznym, albo, czy niealgorytmiczność posiada swój „fizyczny/materialny" nośnik? Konkluzja jest zaś następująca: algorytmicznie zinterpretowana teoria chaosu deterministycznego koresponduje z przypadkową/nierozstrzygalną częścią matematyki. Trzeba przy tym jednak stale mieć na względzie, że zawsze jest to nierozstrzygalność, niealgorytmiczność, przypadkowość z modelu, w którym dokonujemy deskrypcji.

Słowa kluczowe: teoria obliczalności, teoria chaosu, teza Churcha.

Odnosząc się do nierozstrzygalności w świecie fizycznym postawić trzeba następującą kwestię: czy rzeczywiście mamy do czynienia z nierozstrzygalnością w świecie fizycznym, czy tylko z nierozstrzygalnością w uniwersum eksperymentalnym, do którego docieramy poprzez matematyczny model? W innych słowach, czy nieobliczalność płynie „z natury", czy z modelu, w którym dokonujemy deskrypcji? Jak wiadomo, wszystkie wystarczająco bogate modele matematyczne są nierozstrzygalne. W szczególności idzie tu o nieelementarną arytmetykę liczb rzeczywistych, którą wykorzystujemy do opisu fizycznych układów dynamicznych. W tym obszarze fundamentalną rolę odegrało odkrycie przez Stefana Banacha i Stanisława Mazura nieobliczalnych funkcji analitycznych *signum x* oraz *integer part x*, które wyprowadzają poza klasę ciągów liczb rzeczywistych obliczalnych. Warto przypomnieć, że rezultat Banacha i Mazura z lat 1936–39 jest „rzeczywistym" równoważnikiem twierdzenia Kurta Gödla o niezupełności. W największym skrócie, jeżeli zdanie Gödla mówi o sobie, że jest niedowodliwe, to „zdanie" Banacha i Mazura, czyli ciąg liczb rzeczywistych obliczalnych jest sformułowane w taki sposób, że mówi osobie, że jest nieobliczalne (zbieżność ciągu

[1] Adres Autora: awilk@ifispan.waw.pl

do granicy jest nieefektywna/nieobliczalna).[2] Syntaktyczne struktury obu postępowań dowodowych wykorzystujących starożytny paradoks kłamcy są tu ekwiwalentne. Opierając się na wyniku Banacha i Mazura amerykańscy matematycy Pour-El i Richards w latach osiemdziesiątych pokazali, że rekurencyjne równania ruchu przy rekurencyjnych warunkach początkowych mogą mieć nierekurencyjne rozwiązania.[3] Przebieg obliczeń nie jest więc unikalnie zdeterminowany przez wejście i rekurencyjne relacje zawarte w zbiorze instrukcji. Dwa różne wyjścia mogą być otrzymane z tego samego wejścia przy różnych komputacjach. Ujmując metaforycznie, „start" może być rekurencyjny, a „lądowanie" i tak będzie nieobliczalne. Jeżeli sprawa dotyczy nieobliczalności w świecie fizycznym, to trzeba też wspomnieć o tezie Churcha-Turinga. Stanowi ona, że formalna specyfikacja funkcji (częściowo) rekurencyjnej koresponduje z nieformalnym pojęciem efektywnego procesu obliczeniowego. Wejście komputacji koresponduje z argumentem funkcji. Wyjście koresponduje z wartością funkcji. Heurystyczne pojęcie efektywnych obliczeń koresponduje z precyzyjnym formalnie pojęciem funkcji częściowo-rekurencyjnej.

> Teza Churcha-Turinga. Algorytm koresponduje z funkcją częściowo-rekurencyjną. Cokolwiek wydaje się być efektywnie obliczalne może być przeprowadzone w zakresie (działania) funkcji częściowo-rekurencyjnych. W drugą stronę, poprzez nasze rozumienie mechanicznego obliczania każda funkcja częściowo-rekurencyjna koresponduje z algorytmem. Innymi słowy, funkcja rekurencyjna jest matematycznym obiektem, który może być zdefiniowany przez algorytm.

> Terminy „efektywnie obliczalny", „mechanicznie obliczalny", „obliczalny", „rekurencyjnie przeliczalny" mogą być zatem używane zamiennie. Jak łatwo zauważyć, teza Churcha- Turinga posiada aspekt ewolucyjny – odnosi się ona do procesów obliczeniowych, które są realizowalne w świecie fizycznym. Oznacza to, że ta teza może się zmieniać w czasie tak jak i one. Innymi słowy, każda zmiana rozumienia pojęcia efektywnych obliczeń wpłynie na zmianę rozumienia tezy Churcha-Turinga. W oryginale teza Churcha brzmi następująco:

> …twierdzi się, że pojęcie funkcji efektywnie obliczalnej powinno zostać zidentyfikowane z pojęciem funkcji rekurencyjnej, gdyż inne wiarygodne definicje efektywnej obliczalności okazały się dawać pojęcia albo równoważne, albo słabsze od rekurencyjności.[4]

[2] S. Mazur, *Computable Analysis*, Rozprawy Matematyczne XIII, PWN, Warszawa 1963.

[3] M. B. Pour-El, J. I. Richards, *Computability and Noncomputability in Classical Analysis*, "Trans. Amer. Math. Soc"., 275, 1983, 539–560; oraz: M. B. Pour-El, J. I. Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer, Berlin–Heidelberg 1989.

[4] A. Church, *Abstract*, *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, "Bulletin of the American Mathematical Society", 41, 1935, s. 332–333; cyt. za: A. Olszewski, *Teza Churcha*, Universitas, Kraków 2009, s. 109.

Stwierdzenie „inne wiarygodne definicje" świadczy o tym, że Church widział w tezie głównie definicję o charakterze identycznościowym. Jak wiadomo, teza Churcha nie spełnia warunków twierdzenia matematycznego, bo pojęcie mechanicznej procedury nie jest formalne. Wykluczony jest zatem jej dowód. W dyskusji wokół relacji mechaniczna obliczalność–rekurencyjność najczęściej też padają zwroty: „jak do tej pory", „dotąd", „dotychczas"... Andrzej Mostowski pisze:

> Z natury zagadnienia jest to tylko hipoteza. Dowodu jej podać nie można, bo trzeba by powiedzieć ściśle, co znaczy efektywny przepis dla rozwiązania jakiegoś zagadnienia. Teza Churcha nie została dotąd podważona. Każde efektywnie wykonalne postępowanie dawało się dotąd sprowadzić do funkcji obliczalnych. [5]

Słowa te mogą sugerować empiryczny charakter tezy, czyli zdania, które wymaga nieskończonego potwierdzania. Jeżeli idzie o Gödla, to traktował tezę Churcha jako zasadę heurystyczną: „Nie może to zostać dowiedzione, ponieważ pojęcie skończonego obliczania nie jest zdefiniowane, ale może służyć jako zasada heurystyczna."[6]

Co ciekawe, Gödla do tezy przekonała dopiero analiza mechanicznego obliczania przeprowadzona przez Turinga.[7] Z uwagi na to, że tezę Churcha-Turinga wykorzystuje się w dowodzeniu, powstaje problem jej mocy. Wiadomo, że istotne użycie tezy ma miejsce w dowodach negatywnych. Jeżeli bowiem stwierdzimy, że dana funkcja nie jest rekurencyjna, to jest oczywiste, że nie jest obliczalna.[8] Co się tyczy empiryczności tezy Churcha-Turinga, to można ją rozumieć dwojako:

1. Jest to hipoteza empiryczna, której konsekwencje są obserwowalne/sprawdzalne.
2. Obliczanie funkcji realizuje się przez system fizyczny, który zajmuje skończoną przestrzeń, funkcjonuje w skończonym czasie i zgodnie z prawami fizyki.

Warto zaznaczyć, że aspekt empiryczności akcentują matematycy, którzy zajmują się sprawą realizowalności obliczalności, czyli rzeczywistymi maszynami matematycznymi (Mostowski). Empiryczna interpretacja tezy nie jest jednak jedyną. Według Romana Murawskiego i Jana Woleńskiego traktuje się też to stwierdzenie matematyczne jako:

— twierdzenie albo aksjomat
— definicję
— eksplikację w sensie Carnapa

---

5 A. W. Mostowski, *Liczby naturalne i funkcje obliczalne*, PZWS, Warszawa 1971, s. 131.

6 K. Gödell, *Poscriptum*, w: M. Davis (red.), *The Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*, cyt. za: A. Olszewski, *Teza Churcha*, Universitas, Kraków 2009, s. 137.

7 A. Turing, *On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem*, "Proc. Lond. Math. Soc.", Ser. 2, 42, 1937.

8 Zob. R. Murawski, J. Woleński, *The Status of Church's Thesis,* w: A. Olszewski, J. Woleński, J. Robert (red.), *The Church's Thesis after 70 Years,* Ontos Verlag 2006.

Ci dwaj filozofowie opowiadają się za jeszcze innym rozwiązaniem:

> ...eksplikacje potocznych (standardowych) sposobów użycia wyrażeń polegają na ich normalizacji poprzez precyzyjne środki pojęciowe [...]. Normalizacje w tym sensie zwykle odpowiadają określonym intuicjom i to chroni je przed arbitralnością, choć warunki ich poprawności pozostają częściowo otwarte.[9]

Matematyce potrzebna jest teza Churcha, dodają autorzy, bo nie wszystkie wyniki można uzyskać stosując wyłącznie formalizm teorii rekursji. W aparacie funkcji rekurencyjnych najwyraźniej nie do końca zawiera się całość matematycznych intuicji.

Istotne dla nas w tej chwili jest jednak to, że teza Churcha-Turinga zawiera składową nierozstrzygalną, mianowicie, że algorytm nie musi być zdefiniowany dla wszystkich wartości wejściowych. Jeżeli zatem ktoś przyjmuje, że Uniwersum jest rodzajem deterministycznej maszyny liczącej, czyli jest wewnętrznie algorytmiczne, to musi respektować fakt, ze istnieją procesy/algorytmy nieefektywne.[10] Warto o tym pamiętać, ponieważ często odkrycie nieefektywności w naturze traktuje się jako falsyfikator tezy Churcha-Turinga. Dzieje się tak, zdaniem niektórych, dlatego że „...nauka, przynajmniej od czasów Newtona, jest w dużej mierze oparta na identyfikacji i matematycznej deskrypcji algorytmicznej zawartości Uniwersum."[11]

Z takiej diagnozy wyciąga się zazwyczaj co najmniej dwa wnioski. Pierwszy, że całe Uniwersum jest rodzajem skończonego deterministycznego automatu. Drugi, że interesuje nas tylko to, co w tym Uniwersum jest mechaniczne/deterministyczne/rekurencyjne. Pierwszy ma charakter ontologiczny, a drugi epistemologiczny. Rzecz jasna, w drugim przypadku dopuszczamy możliwość, że oprócz algorytmicznej zawartości *Uniwersum* istnieje jeszcze jakaś jego inna zawartość, czyli zawartość niealgorytmiczna. Stale trzeba jednak mieć na względzie, iż zakładając, że świat realny składa się ze złożonych algorytmów, jednocześnie przyjmujemy, że prawa przyrody są mechanistyczne, więc obliczalne/rekurencyjne w sensie tezy Churcha-Turinga. Co zatem będzie się działo z naszym modelem świata fizycznego, gdy zarejestrujemy obecność zjawisk nie podlegających standardowej digitalnej reprezentacji?

Innymi słowy, gdy wykryjemy zjawiska nie posiadające cech wyjątkowych, czyli posiadającyce charakterystykę przypadkową? Odpowiedź jest prosta: będziemy mieli kłopoty z tezą Churcha-Turinga. W tym miejscu potrzebne są wyjaśnienia techniczne. Jak się okazuje, niektóre fizyczne układy dynamiczne można specyfikować wykorzystując narrację teorii algorytmicznej informacji. Dokładnie rzecz biorąc, algorytmicznie da się specyfikować

[9] S. Murawski, J. Woleński, op. cit., s. 324.

[10] Termin „wewnętrznie" denotuje cechę, która nie płynie z modelu.

[11] S. Barry Cooper, P. Odifreddi, *Incomputability in Nature*, w: *Computability and Models*, Kluwer, Dordrecht 2003, s. 137–160.

układy chaotyczne. Należy zacząć od tego, że zbiory obliczane przez maszynę Turinga są ekwiwalentne zbiorom rozstrzygalnym przez algorytm. Matematyczne pojęcie Martin-Löfa przypadkowości odpowiada intuicyjnemu pojęciu przypadkowości zbioru Z, które ma dwa aspekty:[12]

1. Z nie posiada (nie spełnia) wyjątkowych własności.
2. Z jest trudny do deskrypcji.

Co do punktu 1: Niech zbiór Z powstaje w wyniku idealnego procesu losowego, który przebiega w czasie i dostarczy nieskończenie wiele bitów (0,1). Bity są niezależne. Zero i jedynka mają to samo prawdopodobieństwo $\frac{1}{2}$, jak przy podrzucaniu idealną monetą. Prawdopodobieństwo, że ciąg x jest segmentem początkowym zbioru Z jest równe $2^{-|x|}$. Własności wyjątkowe reprezentowane są przez *null-klasy*, w odniesieniu do jednostajnej miary λ w przestrzeni Cantora. Należy się tu wyjaśnienie, że zbiory liczb naturalnych można widzieć jako atomowe obiekty i identyfikować z nieskończonymi ciągami nad {0,1}. Ciągi te są elementami przestrzeni Cantora $\{0,1\}^N$, zwykle denotowanej przez 2^N. Podzbiory 2^N nazywa się klasami, dla odróżnienia od zbiorów liczb.

DEFINICJA 1. Klasę $A \subseteq 2^N$ nazywamy null-klasą wtedy, gdy $\lambda A = 0$. Jeżeli $2^N - A$ jest null, to mówimy, że A jest conull.

Przykładem mogą być własności wyjątkowe P i Q. Pierwsza stanowi, że wszystkie bity na parzystych pozycjach są zerami:

$$P(Y) \leftrightarrow \forall i Y(2i) = 0$$

Druga stanowi, że jest przynajmniej dwa razy więcej zer niż jedynek w granicy:

$$Q(Y) \leftrightarrow \liminf \#\{i < n : Y(i) = 0\} / n \geq 2/3$$

Odpowiadającymi klasami są *null-klasy*. Odtąd, zgodnie z intuicją, nie powinny zawierać zbioru przypadkowego. Rodzajem *null-klasy* jest $\prod_2^0$ klasa.

DEFINICJA 2. Niech $A \subseteq N^k \times 2^N$ oraz $n \geq 1$.

(i) A jest $\sum_n^0$ wtedy, gdy

$\langle e_1,\dots,e_k,X\rangle \in A \leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2,\dots,Qy_n R(e_1,\dots,e_k,y_1\dots,y_{n-1},X \upharpoonright_{y_n})$ gdzie R jest relacją obliczalną, oraz Q jest "$\exists$" wtedy, gdy n jest nieparzyste, oraz Q jest "$\forall$" wtedy, gdy n jest parzyste.

[12] P. Martin-Löf, *On the Notion of Randomness*, w: *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam–London 1973, s. 73–78.

(ii) A jest $\prod_n^0$ wtedy, gdy dopełnieniem A jest $\sum_n^0$, tzn. $\langle e_1,...,e_k,X\rangle \in A \leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2,...,Qy_n S(e_1,...,e_k,y_1,...,y_{n-1},X\uparrow_{y_n})$

gdzie S jest relacją obliczalną i Q jest "$\forall$" wtedy, gdy n jest nieparzyste, oraz Q jest "$\exists$" wtedy, gdy n jest parzyste.

Relacja jest arytmetyczna wtedy, gdy jest $\sum_n^0$ dla pewnego n.
($X\uparrow_{y_n}$ denotuje segment początkowy X)

Na przykład, $\prod_2^0$ klasa ma formę $\{X : \forall y_1 \exists y_2 S(y_1, X\uparrow_{y_2})\}$, a $\sum_3^0$ klasa ma formę $\{X : \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 R(y_1, y_2, X\uparrow_{y_3})\}$, gdzie S i R są relacjami obliczalnymi.[13]

ad. 2. Obiekt przypadkowy nie posiada wzoru. Jest niezorganizowany. Naszemu intuicyjnemu pojęciu przypadkowości odpowiada intuicyjne pojęcie „trudny do deskrypcji". Trzeba zanotować, że istnieją systemy deskrypcji zwane optymalnymi maszynami, które są w stanie rywalizować z każdą inną maszyną, więc opisać każdy możliwy ciąg symboli.[14] Zgodnie z tym ujęciem, pojęcie „trudny do deskrypcji" można sformalizować jako „nie podlegający kompresji", w odniesieniu do optymalnej maszyny. Nieformalnie rzecz biorąc, ciągi nie podlegające kompresji danych posiadają tę samą własność, której wymagamy od ciągów przypadkowych. Dla zbiorów pojęcie „trudny do deskrypcji" jest jednak trudniejsze, ponieważ każdy system deskrypcji opisuje tylko obliczalnie wiele zbiorów. Należy więc wprowadzić pojęcie deskrypcji domkniętej. Typ deskrypcji domkniętej reprezentują właśnie *null-klasy* $\prod_1^0$ i $\prod_2^0$. Konkluzja jest następująca: zbiór jest trudny do deskrypcji wtedy, gdy nie dopuszcza deskrypcji domkniętej, powiedzmy w sensie *null* $\prod_2^0$ *klasy*. Jeżeli dopuszcza deskrypcję na przykład w sensie *null* $\sum_1^0$ *klasy*, to nie jest trudny do deskrypcji. Dalej, warunki 1 i 2 wzięte razem charakteryzują pojęcie testu na przypadkowość, a w rezultacie matematyczne pojęcie przypadkowości: Z jest przypadkowy wtedy, gdy przechodzi wszystkie testy danego typu.

Pojęcie testu (formalne). Aby podać definicję Martin-Löfa-testu na przypadkowość potrzebne są dwa preliminaryne fakty:

FAKT 1 (zbiory otwarte). $R \subseteq 2^N$ jest rekurencyjnie przeliczalnym zbiorem otwartym wtedy, gdy $R = [W_e]$ dla pewnego n.

[13] Zob. A. Nies, *Computability and Randomness*, Oxford Logic Guides 51, Oxford University Press 2009.

[14] Optymalna maszyna generuje ciąg a_n wtedy, gdy na wejściu dostaje jego deskrypcję.

($W_e =$ dziedzinie (Φ_e); Φ_e denotuje funkcję częściowo-rekurencyjną o indeksie e) [15]

FAKT 2. $A \subseteq 2^N$ jest null wtedy, gdy istnieje ciąg $(G_m)_{m \in N}$ zbiorów otwartych taki, że $\lim_m \lambda G_m = 0$ oraz $A \subseteq \bigcap_m G_m$. [16]

(klasa $B \subseteq \bigcap_m G_m$ jest borelowska oraz $\lambda B = 0$) [17]

Definicja Martin-Löfa-testu efektywizuje określenie *null-klasy* z *FAKTU 2*.

DEFINICJA 3. (i) Martin-Löfa-test jest rekurencyjnie przeliczalnym ciągiem $(G_m)_{m \in N}$ takim, że $\forall m \in N \lambda G_m \leq 2^{-m}$. [18]

(ii) Zbiór $Z \subseteq N$ nie przechodzi testu wtedy, gdy $Z \in \bigcap_m G_m$, w przeciwnym razie Z przechodzi test.

(iii) Z jest Martin-Löf przypadkowy wtedy, gdy Z przechodzi każdy Martin-Löfa-test.

Nieformalnie ujmując, Martin-Löfa-test na przypadkowość wychwytuje strukturę, porządek, wzór. Jeżeli zbiór ich nie posiada, to jest przypadkowy. Bądź inaczej: jeżeli zbiór nie należy do np. borelowskiej $\prod_2^0$ *null-klasy*, to jest przypadkowy.[19] Analogicznie jest w przypadku ciągu/liczby rzeczywistej. W rezultacie ciąg/liczba rzeczywista nie podlega kompresji. Dodać jednak trzeba, że testy same w sobie są obiektami, czyli że tylko obliczalnie wiele *null-klas* jest danych przez testy.

W dalszej kolejności musimy pokazać, że (algorytmiczna) przypadkowość pociąga nieobliczalność. W tym celu przedstawimy wpierw algorytmiczną parafrazę twierdzenia Gödla o niezupełności.

TWIERDZENIE 1. Niech L będzie teorią aksjomatyczną zawierającą arytmetykę (Peano), której arytmetyczne konsekwencje są prawdziwe.

(i) Istnieje stała c_L taka, że wewnątrz L żadne zdanie postaci "$H(n) > C_L$" nie jest dowodliwe.

(ii) Niech $\#(L)$ będzie rekurencyjnie przeliczalnym indeksem L. Wtedy istnieje pewna stała c' niezależna od L taka, że wewnątrz L żadne zdanie postaci "$H(n) > H(\#(L)) + c'$" nie jest dowodliwe.

(iii) Istnieją szczególne teorie, których aksjomaty mają zawartość informacyjną $H(aksjomatów) = m + O(1)$, w których jest możliwość

---

[15] Dowód w: A. Nies, *Computability and Randomness,* op. cit., s. 53.
[16] Dowód w: A. Nies, *Computability and Randomness,* op. cit., s. 70.
[17] Z rodziny wszystkich zbiorów zwartych w przestrzeni o pewnej strukturze (algebraicznej), poprzez branie przeliczalnych sum, różnic i przecięć, można utworzyć zbiory borelowskie.
[18] Zbieżność ciągu do granicy musi być efektywna.
[19] Zbiory przypadkowe są też nazywane normalnymi zbiorami Borela.

ustalenia wszystkich prawdziwych twierdzeń postaci $"H(x)=k"$, *z* $k<H(aksjomatów)+O(1)$, *oraz postaci*
$"H(x)\geq H(aksjomatów)+O(1)"$.[20]

Istnieją zatem systemy formalne o skończonej liczbie aksjomatów, a tym samym skończonej zawartości informacyjnej, które mogą dostarczać obiekty (twierdzenia) o dowolnie wysokiej zawartości informacyjnej. Później Chaitin dowiódł, że czas obliczeń dla twierdzeń postaci $"H(x)=k"$, z $k<m=H(aksjomatów)+O(1)$, oraz $"H(x)\geq m=H(aksjomatów)+O(1)"$ jest nieobliczalny. Wiadomość tę przynoszą dwa poniższe twierdzenia. [21]

TWIERDZENIE 2 (ograniczenie na czas obliczeń i złożoność obliczeniową). Albo program p *staje w cyklu czasowym mniejszym niż* $\sum(H(p)+O(1))$, *albo nigdy nie staje. Z tego powodu, jeżeli definiujemy* $d(n)=\max_{|x^*|\leq n} H_D(x)=\max_{|x^*|\leq n} D(x)$, *to*

$$d(n)=\sum(n+O(1))$$

$\sum(n+O(1))$ *jest minimalnym czasem* $d(n)$ *przy którym wszystkie programy o złożoności* $\leq n$ *(faktycznie) stają.*

TWIERDZENIE 3. $\sum$ *nie jest efektywnie obliczalna.*

Końcowy wniosek jest taki, że gdyby czas obliczeń miał być obliczalny, to musiałby istnieć program stopu. Obliczeniowa złożoność związana ze skończonymi lub nie obiektami jest nieobliczalna. Algorytmiczna przypadkowość implikuje nieobliczalność.

Teraz można przejść do algorytmicznej specyfikacji chaosu (deterministycznego). Założeniem wyjściowym jest tu hipoteza, że chaos w świecie fizycznym koresponduje z przypadkowością w matematyce. Jest też jasne, że dalej koncentrujemy się na pojęciu przypadkowej (nieobliczalnej) liczby rzeczywistej.

DEFINICJA 4.[22] *Liczba rzeczywista* r *jest Martin-Löf przypadkowa wtedy, gdy nie jest zawarta w dowolnym zbiorze nieskończonego rekurencyjnie przeliczalnego ciągu* A_i *zbiorów interwałów takim, że miara* $\mu(A_i)$ *jest zawsze mniejsza lub równa* $2^{-i}[\mu(A_i)\leq 2^{-i}]$. *Czyli, że* r *jest Martin-Löf przypadkowa wtedy, gdy*

$$\forall i[\mu(A_i)\leq 2^{-1}]\Rightarrow \neg\forall i[r\in A_i]$$

[20] G. J. Chaitin, *Algorithmic Information Theory,* Cambridge University Press, Cambridge 1987.

[21] G. J. Chaitin, *Information, Randomness and Incompleteness*, World Scientific, Singapore 1987.

[22] Definicja 4 jest „liczbową” adaptacją definicji 3.

Intuicję związaną z „chaotycznym” pojęciem „wrażliwości na warunki początkowe” werbalizowano w filozofii stosunkowo wcześnie. Pascal stwierdził, że kształt nosa Kleopatry zmienił oblicze świata, a Rousseau zauważył, że „nikczemna przyczyna” ma czasami „zaskakująco potężne skutki”, w sensie wpływu na organizację społeczeństwa.[23] Obecnie tzw. chaos deterministyczny specyfikuje się przez:

(i) efektywnie obliczalną/rekurencyjną/deterministyczną ewolucję,
(ii) własność nieliniowego systemu ewolucji do wykładniczego w czasie rozchodzenia się początkowo bliskich trajektorii,
(iii) przypadkowe wartości początkowe.

Przypadkowość jest tu definiowana jako Martin-Löf przypadkowość. Można powiedzieć też tak, że jeżeli wartość początkowa jest elementem *continuum*, to prawdopodobieństwo, iż jest Martin-Löf przypadkowa równa się jeden – „prawie wszystkie” wartości początkowe są przypadkowymi/nieobliczalnymi liczbami rzeczywistymi. Ogólnie ujmując, idea chaosu opiera się na spostrzeżeniu, że przypadkowość, albo niekompletna informacja zawarta w wartości początkowej, ujawnia się w trakcie ewolucji. Dlatego kryterium specyfikacji chaosu deterministycznego jest obecność odpowiedniej ewolucyjnej funkcji zdolnej „odsłonić” informację „prawdziwej”, lecz nieznanej wartości początkowej x_0. Przypadkowej liczby rzeczywistej właśnie. Szczegóły sprawy są raczej domeną fizyki, jednakże, albo tzw. niepewność δx_0 wartości początkowej, albo korespondująca zmienność wartości początkowej, zwiększa się w czasie. Jako miarę separacji dwóch różnych wartości początkowych przyjmuje się wykładnik Lapunowa λ. Scenariusz jest zaskakujący, bo efektywnie obliczalna funkcja dostarcza Martin-Löf przypadkową ewolucję systemu „odsłaniając” informację zawartą w Martin-Löf przypadkowej wartości początkowej. Przypadkowość jest jednak pierwotnie usytuowana w wartości początkowej [24]. Chociaż dla celu tu postawionego, a precyzyjnie, pokazania, że jest istotny związek między chaosem a nieobliczalnością, nie ma właściwie znaczenia, gdzie ona wpierw rezyduje, tylko że w ogóle znalazła miejsce.[25] Możemy więc sformułować następującą równoważność:

$$\text{chaos} \Leftrightarrow \text{deterministyczna przypadkowość}$$

---

[23] B. Pascal, *Myśli*, Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1972; oraz J. J. Rousseau, *Umowa społeczna*, BKF, PWN, Warszawa 1966.

[24] Matematyczny związek między algorytmiczną przypadkowością a wrażliwością na warunki początkowe ustalają twierdzenia Brudno-White'a i Pesina; zob. G. Schurz, *Kinds of Unpredictability in Deterministic Systems,* w: P. Weingartner, G. Schurz (red.), *Law and Prediction n the Light of Chaos Research*, Springer, Berlin 1996.

[25] Istotne jest rozróżnienie między przypadkowością generowaną wewnętrznie przez ewolucję systemu a przypadkowością z warunków początkowych. Zachowanie w sensie sekwencji na wyjściu może okazać się przypadkowe również wtedy, gdy wartości początkowe nie są przypadkowe; zob. S. Wolfram, *New Kind of Science*, Wolfram Media, Inc., 2002; oraz: R. W. Batterman, *Chaos: Algorithmic Complexity vs. Dynamical Instability*; w: Weingartner, Schurz, op. cit., 1996.

Oznacza to, że „...deterministyczne algorytmy są wykorzystywane do obliczania zmiennych, które faktycznie są matematycznie przypadkowe", oraz że „...chaos znaczy deterministyczna przypadkowość."[26] Jeżeli zatem fizyka opisując niektóre układy dynamiczne trafnie wykorzystuje algorytmiczną narrację, to mamy implementowaną w naturze nieobliczalność, bo algorytmiczna przypadkowość implikuje nieobliczalność.

Każda algorytmiczna specyfikacja układu chaotycznego mieści się w pewnym schemacie. System dynamiczny (mechaniki klasycznej) jest definiowany przez stan przestrzeni S, który zawiera pozycję i prędkość każdej cząstki w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Przedmiotem naszego zainteresowania jest ewolucja systemu z równań, które są zwykle równaniami różniczkowymi opisującymi siły działające na cząstkę(i). Rozwiązaniami równań są funkcje $s : T \rightarrow S$, które opisują możliwe przesunięcia cząstek w S, w zależności od czasu. Przesunięcia te nazywa się też trajektoriami. Czas t i pozycja s w S są parametrami ciągłymi o wartościach rzeczywistych. Dalej, rozpatrujemy tzw. złożoność komputacji, która oblicza stan przyszły $s(t)$ z danego stanu początkowego $s(t_0)$. Różnicę $t - t_0$ nazywa się dystansem predykcji. Niektóre równania różniczkowe są całkowalne, czyli dopuszczają tak zwaną *closed form* rozwiązania. Na przykład równanie $ds / dt = k.s$ ma klasę *closed form* rozwiązań $s(t) = s_0.e^{kt}$, które opisują wykładniczy wzrost lub zanik (zależnie od tego, czy k jest dodatnie, czy nie). Inne równania różniczkowe, choćby związane z problemem trzech i więcej ciał, nie są całkowalne. Pewne z nich można rozwiązać aproksymacyjnie, następne nie dopuszczają nawet aproksymacyjnych *closed form* rozwiązań. Wchodzą w grę jedynie rozwiązania punktowe. W tym rozumieniu, że istnieje algorytm, który oblicza $s(t_{n+1})$ z $s(t_n)$, dla danego rozkładu *continuous time* na przedziały dyskretne.

Z matematycznego punktu widzenia różnica między *closed form* a *open form* rozwiązaniami polega na tym, że w drugim przypadku funkcja g taka, że $s_n = g(s_0, n)$ jest definiowana przez $g(s_0, n) = f^n(s_0)$, gdzie f^n oznacza f iterowaną n-razy. Ważne jest jednak to, że przy *closed form* rozwiązaniach złożoność komputacji funkcji $s = f(t)$ nie zależy, lub prawie nie zależy, od dystansu predykcji $t_1 - t_0$. Dla odróżnienia, przy *open form* rozwiązaniach złożoność komputacji wzrasta znacząco i proporcjonalnie do dystansu predykcji. W efekcie, jeżeli równanie ma *open form* rozwiązanie, to algorytm predykcyjny nie jest zdolny przewidzieć stanu przyszłego.

Teraz zdefiniujemy nieprzewidywalność wykorzystując pojęcie algorytmicznej przypadkowości. Rozważamy dyskretne ciągi (trajektorie) w skończonym stanie przestrzeni z dyskretnym czasem. Algorytmiczna złożoność $K(SQ / I)$ skończonego ciągu danej informacji jest definiowana przez długość najkrótszego programu, który generuje ciąg SQ (rozważamy maszyny

[26] J. Ford, *Quantum Chaos, Is There Any?,* cyt. za: Weingartner, Schurz, op. cit., s. 212.

ekwiwalentne deterministycznej maszynie Turinga). Aby otrzymać definicję algorytmicznej przypadkowości zakładamy, że informacja I ma długość n_{SQ} ciągu SQ. Rozważamy przy tym „zachowanie" $K(SQ/n_{SQ})$ przy wzrastającej n_{SQ}. Teraz, jeżeli $K(SQ/n_{SQ})$ wzrasta wraz z n_{SQ} w sposób nieograniczony, czyli granica ilorazu $K(SQ/n_{SQ})/n_{SQ}$, dla $n \to \infty$, jest dodatnia, to ciąg SQ jest algorytmicznie przypadkowy. Jest oczywiste, że stoi za tym nieformalne przesłanie, że ciąg jest algorytmicznie przypadkowy wtedy, gdy program, który go generuje jest przynajmniej tej samej długości co on sam. Powyższe ujęcie bierze pod uwagę długość programu. Można jednak podejść do sprawy w ten sposób, że rozważa się długość komputacji potrzebną do wyznaczenia stanu przyszłego. Program dla *open form* rozwiązania ma następującą postać: *zbiór* $s_0 = k$; *dla* $0 < n \leq p$ *oblicza* $s_{n+1} = f(s_n)$, *stop*, gdzie p jest dyskretnym czasem predykcji. Jeżeli f jest funkcją o niewielkiej złożoności obliczeniowej, która jest niezależna od n, to długość programu będzie raczej krótka. Tak jest w przypadku funkcji logistycznej $s_{n+1} = 4s_n(1 - s_n)$. Ale czas, który program potrzebuje do obliczenia s_n z s_0, czyli tzw. czas stopu, może być bardzo długi. Innymi słowy, to że ciąg SQ jest przypadkowy nie tylko implikuje, że nie istnieje *closed form* rozwiązanie, ale także to, że nie istnieje żadne *open form* rozwiązanie generowane przez funkcję iteracyjną $f(s_n)$, przy złożoności, która nie wzrasta z n. W taki oto sposób otrzymujemy pojęcie nieprzewidywalności/nieobliczalności zdefiniowane „algorytmicznie przypadkowo". Typowym przykładem rzeczywistego chaotycznego (przypadkowego) układu fizycznego, który dostarcza nieobliczalność jest układ „koło ruletki plus krupier".[27]

Koło ruletki plus krupier. Wyobraźmy sobie dwie czarne skrzynki. Pierwsza zawiera idealny gaz. Druga zawiera koło ruletki wraz z osobą, która wprowadza je w ruch. Zakładamy, że w pierwszej skrzynce znajduje się urządzenie, które dokonuje pomiarów na idealnym gazie, w jednostajnych przedziałach czasowych, oraz drukuje wyniki tych pomiarów. Rozkład $\alpha = \{A_i : i = 1,\ldots, N-1\}$ przestrzeni fazowej można pomyśleć jako reprezentujący możliwe pomiary wyjściowe (wydrukowana liczba i definiuje, w której kratce znajduje się punkt w każdym przedziale czasowym). Dla idealnego gazu trajektorie bliskich stanów początkowych rozchodzą się wykładniczo w czasie, entropia jest dodatnia, a ciąg orbity jest algorytmicznie przypadkowy (ma dodatnią algorytmiczną złożoność). Druga czarna skrzynka zawiera N-przestrzenne koło ruletki podzielone na segmenty $B_0, B_1,\ldots, B_{N-1}$, odpowiadające liczbom naturalnym. Koło kręci się a specjalny wskaźnik rejestruje segment, który pojawił się na końcu przedziału czasowego. Dzięki temu skrzynka drukuje liczbę związaną z zarejestrowanym segmentem. Tak samo, jak w przypadku skrzynki z idealnym gazem

[27] Zob. R. W. Batterman, *Defining Chaos*, "Philosophy of Science", 60, 1993, s. 46–66.

otrzymujemy ciąg liczb z alfabetu $\{0,1,\ldots,N-1\}$. Odkąd koło ruletki jest przykładem systemu przypadkowego, oczekujemy, że ciągi powstające z jego udziałem będą algorytmicznie złożone. Uwzględniając twierdzenie Brudno-White'a oczekujemy również, że taki system dynamiczny będzie miał dodatnia entropię, a uwzględniając twierdzenie Pesina, że bliskie warunki początkowe będą dostarczać wykładniczo rozchodzące się trajektorie. Następnie Batterman argumentuje, że łańcuch ekwiwalencji charakterystycznych dla idealnego gazu nie zachodzi dla koła ruletki. Rozumowanie opiera się na możliwych różnicach w ewolucji systemów w dwóch skrzynkach. Idealny gaz jest systemem ergotycznym niecałkowalnym, którego trajektorie w przestrzeni fazowej są zdolne wędrować przez całą $6N-1$ wymiarową energię powierzchniową. Jak już wspomniano, trajektorie te wykazują wykładniczą wrażliwość na warunki początkowe. Z drugiej strony, przestrzenią fazową „idealnego" koła ruletki jest cylinder ze współrzędnymi θ, położeniem kątowym koła, oraz p_θ, czyli momentem pędu koła. Jeżeli koło porusza się bez tarcia, to dla danego p_θ jest właśnie kołem na cylindrze. Tym samym, dwa punkty początkowe, które są blisko siebie nie mogą się rozchodzić wykładniczo w czasie. Ruch jest całkowalny. Jeżeli dopuścimy dyssypatywność, to trajektorie będą spiralami z pewnego punktu początkowego (θ, p_θ) do pewnego stanu spoczynku $(\theta',0)$. Sytuacja ta również nie dopuszcza wykładniczej wrażliwości na warunki początkowe. Okazuje się zatem, że łańcuch równoważności – dodatnia algorytmiczna złożoność $\Leftrightarrow$ dodatnia metryczna entropia $\Leftrightarrow$ dodatnie wykładniki Lapunowa – załamuje się dla systemu. Twierdzenie Brudno-White'a stanowi, że gdy wyjście (skrzynki) jest algorytmicznie przypadkowe, to system musi mieć dodatnią metryczną entropię. Jednakże, odkąd żadna trajektoria nie ma dodatniego wykładnika Lapunowa, to związek między złożonością a wrażliwością na warunki początkowe nie zachodzi. Dla Battermana jest to jednak konkluzja zbyt pochopna. Głębsza analiza pokazuje, że koło ruletki nie jest systemem przypadkowym. Z tego względu, że po to, aby otrzymać przypadkowy ciąg wyjściowy potrzebna jest osoba, która wprowadza koło w ruch. Oznacza to, że ciąg wyjściowy jest przypadkowy, ponieważ w „sztuczny" sposób został skonstruowany. W innych słowach, przypadkowość na wyjściu zależy od faktu, że koło związane jest z zewnętrznym źródłem przypadkowości. Przypomnijmy, podstawowy problem skupia się wokół tego, czy w przypadku systemu deterministycznego możliwym jest wyprowadzenie wrażliwości na warunki początkowe z przypadkowości ciągu wyjściowego? Jak się okazuje, koło ruletki nie jest „prawdziwym" systemem deterministycznym, bo stan na końcu przedziału nie determinuje następnego. W skrócie, osoba wprowadzająca koło w ruch nie czyni tego zgodnie z deterministycznymi zasadami. System jest więc indeterministyczny lub stochastyczny, co jest interesujące samo w sobie, bo niezależny stochastyczny proces dostarcza ciągi, które są algorytmicznie przypadkowe. W efekcie dysponujemy jednak nieobliczalnością, ponieważ układ „koło ruletki z osobą wprowadzającą je w ruch” jest już algorytmicznie przypadkowy, a przypadkowość pociąga nieobliczalność.

W tekstach poświęconych chaosowi deterministycznemu najczęściej wymienia się jednak tzw. „problem trzech ciał”. Problem ten jest jednym z ważnych zadań matematyki i fizyki od XVII wieku. Dotyczy ruchu ciała o nieznacznej masie, które porusza się w polu grawitacyjnym dwóch ciał o dużej masie. W roku 1893 Henri Poincaré odkrył, że ruch małego ciała może być bardzo zaskakujący, nieregularny. Dzisiaj uważa się, że jeżeli nawet można pomyśleć rozwiązanie problemu trzech ciał, to jedynie w terminach standardowych, ale „bardziej wyszukanych funkcji”.[28] Ilustracją problemu są pozycje trzech idealnych planet w przypadku spełniającym następujące równanie różniczkowe:

$$\partial_{tt} z[t] == -z[t] / z[t]^2 + (1/2(1 + eSin)[2\pi t]))^2)^{3/2}$$

gdzie e jest ekscentrycznością orbity eliptycznej planet. Pomijając sytuację, gdy $e = 0$, równanie nie ma rozwiązania w terminach standardowych funkcji (rekurencyjnych). Kreisel uważał, że problem kolizji związany z problemem trzech ciał można traktować jako potencjalne źródło nieobliczalności, a dokładnie, jako „...sytuację do analogowego obliczania funkcji nierekurencyjnych”. W tym momencie możemy wrócić do „ewolucyjnego” aspektu tezy Churcha-Turinga, czyli realizowalności obliczalności w świecie fizycznym, i postawić kwestię, czy obliczanie non-digitalne, choćby w postaci *neural nets*, stanowi jakąś nową jakość w informatyce. Czy w sposób analogowy można obliczyć „więcej” niż w cyfrowy? Przypuszczenie to nie ma do tej pory potwierdzenia. Maszyny analogowe, podobnie jak cyfrowe z układem symulującym losowość, mają często szybszy czas wykonania, ale ich „obliczeniowy zasięg” jest ekwiwalentny deterministycznej maszynie Turinga. Nie stanowią tym samym żadnego przełomu w obliczaniu. W dalszym ciągu nie widać więc zagrożeń dla tezy Churcha-Turinga.[29]

Przeświadczenie, że bieg zdarzeń jest nieprzewidywalny i zaskakujący, towarzyszy nam stale. Jego podstawą jest chociażby doświadczenie dnia codziennego. Artykuł ten jest próbą związania tej potocznej intuicji z algorytmicznie zinterpretowaną teorią chaosu. Obraz świata, jaki się z tego zabiegu wyłania jest taki, że przypadkowa/nieobliczalna część matematyki może korespondować z chaosem albo wręcz indeterminizmem w świecie fizycznym. Jednak cały czas trzeba pamiętać, że jest to jedynie nieobliczalność i przypadkowość „z modelu”, w którym dokonujemy deskrypcji. Odno-

[28] S. Wolfram, *New Kind of Science*, Wolfram Media, Inc., 2002, s. 972.

[29] Zob. M. Bremer, *A Defence of the Church-Turing-Thesis,* w: *Concepual Atomism and Justificationism Semantics*, Intenationaler Verlag der Wissenschaften, Frankfurt 2008.; oraz: J. F. Costa, B. Loff, J. Mycka, *The New Promise Analog Computation,* w: S. Barry Cooper, B. Löwe, A. Sorbi (red.), *Computation and Logic in the Real World*, Berlin–Heidelberg 1997.

śnie implementacji nieobliczalności w naturze, to dalej nie ma pewności, czy rzeczywiście zachodzi. Pocieszające może być jednak to, że również inne modele, choćby rekurencyjnie zinterpretowana analiza matematyczna, dostarczają nierozstrzygalną konkluzję. Słowo „pocieszające" ma tu oczywiście związek z faktem, że w przypadkowym, nieobliczalnym, czy indeterministycznym świecie, jest miejsce na coś, co nazywamy wolną wolą.

BIBLIOGRAFIA

S. Barry Cooper, B. Löwe, A. Sorbi (red.), *Computation and Logic in the Real World*, Springer, Berlin, Heidelberg 1997.

S. Barry Cooper, P. Odifreddi, *Incomputability in Nature*, w: *Computability and Models*, Kluwer, 2003, s.137–160.

R. Batterman, , *Defining Chaos*, "Philosophy of Science", 60, 1883, s. 43–66.

_____, *Chaos: Algorithmic Complexity vs. Dynamical Instability*:, w: P. Weingartner,G. Schurz (red.), Law and Prediction in the Light of Chaos Research, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1996.

M. Bremer, *A Defence of the Church-Turing-Thesis*, w: *Conceptual Atomism and Justificationism Semantics*, Internationaler Verlag der Wissenschaften, Franfurt 2008.

G. J. Chaitin, *Algorithmic Information Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1987.

_____, *Information, Randomness and Incompleteness*, World Scientific, Singapore 1987.

A. Church, *Abstract, An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, "Bulletin of the American Mathematical Society", s. 332–333; zob. też w: Olszewski, 2009.

J. F. Costa, B. Loff., J. Mycka, *New Promise Analog Computation*, w: Barry Cooper, Löwe, Sorbi, op. cit.

G. Kreisel, *Church's Thesis: a Kind of Reducibility Axiom for Constructive Mathematics*, w: *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam, London 1970.

P. Martin-Löf, *On the Notion of Randomness*, w: *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam–London 1970.

S. Mazur, *Computable Analysis*, Rozprawy Matematyczne, XXIII, PWN, Warszawa 1963.

A. Mostowski, *Liczby naturalne i funkcje obliczalne*, PZWS, Warszawa 1971.

R. Murawski, J. Woleński, *The Status of Church's Thesis*, w: A. Olszewski et al., op cit. 2006.

A. Nies, *Computability and Randomness*, Oxford Logic Guides, 51, Oxford University Press 2009.

A. Olszewski, J. Woleński, J. Robert, *The Church's Thesis after 70 Years,* Ontos Verlag 2006.

A. Olszewski, *Teza Churcha*, Universitas, Kraków 2009.

B. Pascal, *Myśli*, Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1972.

M. B. Pour-El, J.I. Richards, *Computability and Noncomputability in Classical Analysis*, "Trans. Americ. Math. Soc"., 275, 1983, s. 539–560.

_____, *Computability in Analysis and Physics*, Springer, Berlin–Heidelberg 1989.

Rousseau J., *Umowa społeczna*, BFK, PWN, Warszawa 1966.

K. Svozil, *Randomness & Undecidability in Physics*, World Scientific Publ., Singapore–London–Hong Kong 1993.

P. Weingartner, G. Schurz, (red.), *Law and Prediction in the Light of Chaos Research*, Springer, Berlin 1996.

S. Wolfram, *New Kind of Science*, Wolfram Media Inc., 2002.

CHAOS AND INCOMPUTABILITY

ABSTRACT

The paper is devoted to the problem of the implementation of incomputability in the real world. It considers the following basic question: has logical non-effectiveness its realization in the physical world or, has non-algorithmicity a physical/material medium? The conclusion is: the algorithmically interpreted theory of deterministic chaos corresponds with the non-random/decidable part of mathematics. It should be, however, taken into account that it is always the non-algorithmicity, randomness of models in which a description is formed.
Keywords: theory of computability, theory of chaos, Church's thesis.