Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria
R. 31: 2022, Nr 4 (124), ISSN 1230–1493
DOI: 10.24425/pfns.2022.143861

Wiedza i poznanie

Stanisław Krajewski

Bardzo interesujący błąd Russella?

Słowa kluczowe: *błąd logiczny, ciekawy błąd, definiowanie prawdy, K. Gödel, L. Henkin, niezupełność, A. Robinson, B. Russell, semantyka, A. Tarski, teoria modeli, uniwersalność logiki, wielka idea w matematyce*

Pewna wypowiedź Kurta Gödla o Bertrandzie Russellu prosi się o interpretację i komentarz[1]. Russell miał popełnić „bardzo interesujący" błąd, czy raczej dokonać błędnej, mylnej interpretacji (*misinterpretation*). Najpierw zapoznajmy się ze słowami sędziwego już wówczas angielskiego filozofa. W liście do Leona Henkina z 1.04.1963 roku Russell przyznał, że był zakłopotany wynikami Gödla[2]. Napisał m.in.:

> Minęło pięćdziesiąt lat od czasu, gdy poważnie zajmowałem się logiką matematyczną i niemal jedyną pracą, którą od tego czasu przeczytałem, była praca Gödla. Zdawałem sobie oczywiście sprawę, że ma ona podstawowe znaczenie, ale była dla mnie czymś zagadkowym. Z tego powodu byłem zadowolony, że już nie zajmuję się logiką matematyczną. Jeśli dany zbiór aksjomatów prowadzi do sprzeczności, to jest jasne, że chociaż jeden z tych aksjomatów musi być fałszywy. [...]
> Zauważa Pan, że byliśmy obojętni wobec prób dowiedzenia, iż nasze aksjomaty nie mogą prowadzić do sprzeczności. Gödel pokazał, że w tej kwestii popełniliśmy błąd. Jednak myślałem, że musi być czymś niemożliwym dowód, iż dany dowolny zbiór aksjomatów nie prowadzi do sprzeczności, i dlatego niezbyt zwracałem uwagę na prace Hilberta. Co więcej,

Stanisław Krajewski, Uniwersytet Warszawski, Wydział Filozofii, ul. Krakowskie Przedmieście 3, 00-047 Warszawa; e-mail: stankrajewski@uw.edu.pl, ORCID: 0000-0002-1142-8112.

[1] Część wątków i sformułowań zawartych w niniejszym artykule została zaczerpnięta z mojej książki (Krajewski 2003, s. 239 i n.).

[2] List do Henkina jest zamieszczony w całości w książce I. Grattan-Guinnessa (2000, s. 592–593); fragmenty cytuje J.W. Dawson (1985), za nim S.G. Shanker (1988, s. 90), a za nimi polskie tłumaczenie fragmentu daje R. Murawski (2000, s. 421).

> wszystkie nasze aksjomaty – poza aksjomatem redukowalności, który zawsze uważałem za prowizorkę – wydawały się jaśnieć oczywistością. Nie wiedziałem, jak ktokolwiek mógłby zaprzeczyć temu, że na przykład *q* pociąga *p* lub *q*, czy że *p* lub *q* pociąga *q* lub *p* (Murawski 2000, s. 421)[3].

W pierwszym akapicie Russell stwierdza coś zaskakującego: ulżyło mu, że nie zajmuje się już logiką – do tego stopnia dokonania Gödla wydały mu się bulwersujące. Odnosząc się do tych słów, zwykle podkreśla się, że Russell nie zrozumiał Gödlowskich twierdzeń o niezupełności. Nigdy ich nie przyswoił (zob. np. Grattan-Guinness 2000, s. 565)[4]. Gdyby to była jedyna istotna okoliczność związana z omawianym listem, nie byłoby w całej tej sprawie nic ciekawego. Ponieważ jednak Gödel uważał inaczej, warto zrozumieć dlaczego. Powód zafrasowania, który wskazuje Russell, brzmi prosto: „Jeśli dany zbiór aksjomatów prowadzi do sprzeczności, to jest jasne, że chociaż jeden z tych aksjomatów musi być fałszywy". Wydaje się, że to jest reakcja na drugie twierdzenie Gödla. Mówi ono o niemożności dowiedzenia w ramach podstawowej teorii arytmetycznej niesprzeczności samej tej teorii. Ale przecież – zdaje się mówić Russell – dowód właśnie został przeprowadzony: wszystkie użyte w *Principia Mathematica* aksjomaty są prawdziwe, a zatem nie mogą prowadzić do sprzeczności. Takie rozumienie sprawy potwierdzają sformułowania następnego cytowanego wyżej akapitu. Aksjomaty – poza aksjomatem redukowalności, który jest czymś prowizorycznym – zdawały się „jaśnieć oczywistością". Zatem Russell, zajmując się logiką, uważał, że nie ma powodu zwracać szczególnej uwagi na program Davida Hilberta, czyli projekt elementarnego dowodu niesprzeczności aksjomatów leżących u podstaw matematyki. Gödel pokazał, dodaje Russell, że „popełniliśmy błąd". Najwyraźniej jednak natura tego błędu pozostaje dlań czymś zagadkowym.

Poza tym zauważa jeszcze, że nie sądził, iż w ogóle da się dowieść, że jakiś zbiór aksjomatów nie prowadzi do sprzeczności. To brzmi niezgodnie z poprzedzającym i powtórzonym po chwili stwierdzeniem o oczywistej prawdzi-

---

[3] „It is fifty years since I worked seriously at mathematical logic and almost the only work that I have read since that date is Gödel's. I realized, of course, that Gödel's work is of fundamental importance, but I was puzzled by it. It made me glad that I was no longer working at mathematical logic. If a given set of axioms leads to a contradiction, it is clear that at least one of the axioms must be false. Does this apply to school boys' arithmetic, and, if so, can we believe anything that we were taught in youth? Are we to think that 2 + 2 is not 4, but 4.001? Obviously, this is not what is intended. [...]

You note that we were indifferent to attempts to prove that our axioms could not lead to contradictions. In this, Gödel showed that we had been mistaken. But I thought that it must be impossible to prove that any given set of axioms does not lead to a contradiction, and, for that reason, I had paid little attention to Hilbert's work. Moreover, with the exception of the axiom of reducibility which I always regarded as a makeshift, our other axioms all seemed to me luminously self-evident. I did not see how anybody could deny, for instance, that *q* implies *p* or *q*, or that *p* or *q* implies *q* or *p*".

[4] Poniżej wspominam podobną opinię Henkina i A. Robinsona.

wości aksjomatów – czy to arytmetyki, czy *Principiów*. Przecież dopiero co napisał, że niesprzeczność aksjomatów jest gwarantowana przez ich prawdziwość. To jest dowód! Zatem stwierdzając, że dowód niesprzeczności nie jest możliwy, musiał myśleć o innego typu dowodzie. Może chodziło o dowód elementarny, w ramach metamatematyki Hilberta. Gdyby tak było, Russell wskazywałby tu na to, że antycypował twierdzenie Gödla. Jednakże inne sformułowania przytoczonego listu raczej nie wskazują na taką antycypację. Wynik Gödla pozostaje dla Russella zagadkowy, a dla nas pozostaje zagadką, jak rozumieć jego słowa.

Zanim rozważymy, jak można zinterpretować wypowiedź Russella, zobaczmy, jak zareagował Gödel. Najpierw zauważmy jednak, że cytowanym słowom Russella łatwo jest odmówić wartości. Abraham Robinson w liście do Gödla z 23.04.1973 napisał: „Henkin zgadza się z moim poglądem, że uwagi Russella o Pana twierdzeniu o niezupełności są mylące. Trudno powiedzieć, czy w czasie, gdy pisał ten list, Russell miał wciąż spójną filozofię Matematyki”[5]. Słowa Russella są wedle niego mylące, co tu oznacza: mylne. Wzmianka o spójnej filozofii matematyki nie wydaje się łączyć bezpośrednio z tematem. Jej poruszenie da się jednak wyjaśnić, jak zobaczymy za chwilę.

Henkin, zauważa Robinson, miał podobnie negatywne zdanie o komentarzu Russella. Mianowicie – wedle streszczenia zawartego w książce Shankera (1988, s. 90) – założył, że Russell myślał, iż Gödel dowiódł sprzeczności arytmetyki. To by oznaczało pomyłkę poważną i mało interesującą. Henkin w liście wyjaśniał współtwórcy logicyzmu różnicę między niezupełnością (*incompleteness*) a sprzecznością (*inconsistency*). Nie wiem, czy wiadomo, jak Russell na to zareagował. W każdym razie taka interpretacja jego słów wydaje mi się przesadnie nieżyczliwa, nawet uwzględniając fakt, że Russell miał już ponad 90 lat. Na pewno nie skreślał go Gödel, który w liście z 2.07.1973 do Robinsona napisał owe zaskakujące słowa, z których pochodzi tytuł niniejszego tekstu:

> Russell niewątpliwie błędnie interpretuje mój wynik; jednak czyni to w bardzo interesujący sposób, co ma związek z pewnymi kwestiami, które dyskutowaliśmy kilka miesięcy temu. W przeciwieństwie do tego Wittgenstein w swej pośmiertnej książce proponuje zupełnie trywialną i nieciekawą mylną interpretację[6].

---

[5] „I gather that Henkin sent you a copy of Bertrand Russell's letter. Henkin agrees with my view that Russell's remarks on your incompleteness theorem are misleading. It is hard to say whether at the time he wrote this letter, Russell still had a coherent philosophy of Mathematics” (list jest zamieszczony w Gödla *Collected Works*, t. V, s. 200).

[6] „I also thank you for asking Henkin to send me Russell's letter. Russell evidently misinterprets my result; however, he does so in a very interesting manner, which has a bearing on some of the questions we discussed a few months ago. In contradistinction Wittgenstein, in his posthumous book, advances a completely trivial and uninteresting misinterpretation” (list jest zamieszczony w Gödla *Collected Works*, t. V, s. 201; jako pierwszy cytował go Dawson 1985).

Jak widać, Gödel też uważa, że Russell się myli. Jednak wedle niego autor *Principia Mathematica* „w bardzo interesujący sposób" błędnie zinterpretował jego wynik. O co chodziło Gödlowi? Na czym miałby polegać błąd Russella – niebanalny, bo wyrażający coś ciekawego, coś, co rzuca światło na dyskusje dwóch spośród najwybitniejszych logików zeszłego stulecia? I na dodatek jest pod względem ujawniania czegoś ważnego odwrotnością „trywialnej" opinii Wittgensteina. Próba podtrzymania interpretacji Wittgensteina została podjęta przez wielu autorów (począwszy od Shankera 1988; por. też Krajewski 2003, rozdz. IV.B.3, s. 293–304), choć nie da się powiedzieć, żeby doprowadziło to do zdecydowanego odrzucenia oceny wyrażonej przez Gödla. Nas interesuje tutaj interpretacja słów Russella.

Henkin postrzegał mylne ujęcie dokonania Gödla jako przyjęcie obecności sprzeczności. Najłagodniejszą korektą opinii Henkina jest przyjęcie, że Russell myślał, iż Gödel dowiódł nie tyle sprzeczności w *Principia Mathematica*, co możliwości zaistnienia sprzeczności w tym systemie. Tymczasem Gödel dowiódł tylko tego, że niesprzeczności nie da się dowieść środkami wyrażalnymi w samym systemie. Chociaż taka korekta krytycznej opinii Henkina – i być może też Robinsona – przynosi wyraźną rehabilitację Russella, to jednak nie wydaje się wyjaśniać, co jest w tym szczególnie interesującego. Cóż zatem było dla Gödla tak ciekawe? Nie wiadomo na pewno, możemy tylko snuć przypuszczenia.

Istnieje inny sposób rozumienia stwierdzenia Russella, że nie sądził, iż w ogóle da się dowieść tego, że jakiś zbiór aksjomatów nie prowadzi do sprzeczności. Jak wspomniałem wyżej, wydawał się uznawać za niewystarczający podstawowy argument, że niesprzeczność aksjomatów jest gwarantowana przez ich prawdziwość. Można to rozumieć jako przyznanie tego, że prawdziwość jest niewyrażalna. Stosujemy ją oczywiście, ale nie ma możliwości – mógł zakładać – takiego jej zdefiniowania, żeby dało się przeprowadzić dowód w stylu matematycznym. Byłoby to jakby antycypowanie twierdzenia Alfreda Tarskiego o niedefiniowalności prawdy, choć oczywiście na zupełnie nieformalnym poziomie. Takie wyjaśnienie z jednej strony wygląda mało przekonująco, z drugiej zaś tłumaczyłoby opinię Gödla. Jest mało przekonujące, bo przecież Tarski pokazał, jak ściśle zdefiniować prawdziwość w strukturach matematycznych, w tym w świecie liczb i zbiorów. Russell nie daje znaku, że o tym słyszał. Prawdziwość pozostaje u niego na poziomie intuicyjnym. To by wskazywało na jego brak rozeznania w dociekaniach logicznych późniejszych niż jego własne badania, do czego zresztą wprost się przyznaje, pisząc, że od pięćdziesięciu lat niemal jedyną pracą, którą przeczytał z tego zakresu, był słynny artykuł Gödla. A przypomnijmy, że w nim nie tylko nie ma definicji prawdziwości, ale Gödel próbuje za wszelką cenę zdefiniować potrzebne pojęcia bez używania ogólnego pojęcia prawdy i innych pojęć semantycznych, pozostając na poziomie możliwie bliskim logicznej syntaktyce. Dlatego na przykład wprowadza pojęcie omega-

-niesprzeczności. Nie wynika to oczywiście z braku rozeznania czy niedostatku kompetencji Gödla. Widzę dwa powody takiego stanowiska. Po pierwsze, w Kole Wiedeńskim i szkole Hilberta pojęcie prawdy było traktowane z podejrzliwością – przynajmniej przed pracami Tarskiego. Gödel chciał więc uprzedzić ewentualne zastrzeżenia co do ścisłości czy naukowości jego argumentacji. Taki powód byłby czysto „polityczny"; byłby on też raczej chwilowy – bo kto jeszcze wyznaje radykalną wersję poglądów w stylu Koła Wiedeńskiego? – a zatem z obecnej perspektywy mało istotny.

Drugi powód unikania pojęcia prawdziwości jest fundamentalny i trwały: Gödel odrzucał program semantyczny Tarskiego. W zasadzie nie cytował nigdy sformułowanej przez Tarskiego definicji prawdy[7]. Zresztą intuicyjne pojęcie prawdy jest wystarczające dla zrozumienia argumentacji Gödla w jego słynnej pracy z 1931 r. oraz uchwycenia jej motywacji. Russell również zawsze zakładał intuicyjne pojęcie prawdziwości. Gödel zapewne aprobował zawarte w przytoczonym liście słowa Russella o prawdziwości aksjomatów logiki. Brzmiały dlań dobrze. Jednak były obarczone błędem, bo Russell nie zrozumiał wagi programu Hilberta, potrzeby dowodu niesprzeczności w sposób niepowątpiewalny, przy użyciu najprostszych środków. A powinien, bo to przecież on sam ugodził Fregego, dla którego aksjomaty jego systemu logiki „jaśniały oczywistością"... Twierdzenia o niezupełności pokazywały, że pierwotny zamysł Hilberta nie da się zrealizować, ale Gödel przez cały czas operował w ramach wskazanych przez Hilberta i jego współpracowników, zwłaszcza Paula Bernaysa. Ramy te musiały ulec rozszerzeniu, ale przez cały czas wszyscy muszą odwoływać się do oryginalnego programu Hilberta. To wyjaśnienie wskazuje, dlaczego Gödlowi mogła się podobać wypowiedź Russella: wychodziła z bliskich mu pozycji, zakładała intuicyjne użycie pojęcia prawdy arytmetycznej. Zarazem była błędna, bo abstrahowała od programu Hilberta. Uzyskujemy w ten sposób jakieś wyjaśnienie, jednak takie ujęcie nie daje dostatecznie przekonującego wytłumaczenia, dlaczego błąd Russella miałby być „bardzo interesujący".

Aby lepiej rzecz zrozumieć, rozważmy jeszcze inny sposób wyjaśnienia opinii Gödla. Niestety nie wiem, czego dotyczyła wspomniana przez Gödla dyskusja z Robinsonem, na którą Russell miał rzucić światło. Można jednak snuć hipotezy. Moja jest następująca: dyskutowali o tym, czy logika jest wszechogarniająca, czy nie. Bo to jest problem, który można postawić w centrum rozważań i uzyskać zadowalające, choć hipotetyczne, wyjaśnienie tego, o co chodziło Gödlowi, gdy określał błąd Russella jako bardzo interesujący.

Otóż Gödel do tego stopnia odrzucał program Tarskiego, że nie próbował rozwiązywać problemów przez rozróżnienie teorii od metateorii. Zakładał, że logika jest jedna, ta sama na każdym poziomie. Postępował więc śladami

[7] Uzasadnienie tej tezy zob. Krajewski 2003, rozdz. III.D; Krajewski 2004.

Russella i Whiteheada, którzy przyjmowali zarówno jedność logiki, jak i jej prawdziwość w intuicyjnym sensie. I zakładali istnienie prawdziwej logiki. Musi ona być niezmienna. Gödel z aprobatą przytaczał dawne stwierdzenie Russella, że logika dotyczy świata rzeczywistego tak prawdziwie jak zoologia, „chociaż jego cech ogólniejszych i bardziej abstrakcyjnych" (*Collected Works*, t. II, s. 120). Prawda jest i dla Gödla pojęciem pierwotnym: według niego pierwotna koncepcja języka zawiera: „prawdę, fałsz, wynikanie"[8].

Chodzi zatem o język, który ma naturalną, zamierzoną interpretację, którą jest po prostu świat. To prowadzi nas do sprawy fundamentalnej, która łączy Gödla z Russellem. Chodzi nie tylko o zmarginalizowanie Tarskiego definicji prawdy, ale o niechęć wobec teorii modeli, czyli odrzucenie traktowania języka jako schematu, który można w najróżniejszy sposób interpretować. Logika ma być jedna i wszechogarniająca. Mówiąc jeszcze ogólniej: Gödel w podejściu do semantyki preferował tradycję rozumienia logiki jako języka uniwersalnego, w przeciwieństwie do logiki jako rachunku mającego wiele interpretacji. Zgodnie z podejściem Fregego i Russella, język jest żywiołem, w którym pozostajemy; nie można opisać (językowo) jego semantyki z zewnątrz, bo mówiąc, musimy go rozumieć, więc jesteśmy automatycznie wewnątrz. Używając sformułowania Wittgensteina, nie można wyjść poza język, tak jak nie można wyjść poza świat. Natomiast Hilbert rozwinął sposób analizy metody aksjomatycznej w taki sposób, żeby ująć nawet logikę. System aksjomatyczny może być widziany jako twór formalny i badany od zewnątrz: powstała więc metalogika – badanie rachunków logicznych. To podejście zastosował Leopold Löwenheim, potem Tarski rozwinął teorię modeli. Abraham Robinson był twórczym kontynuatorem tej koncepcji.

Zdecydowane uznanie jedności i wszechogarniającego charakteru logiki przez Russella jest o tyle ciekawe i znaczące, że najprawdopodobniej to akurat on jako pierwszy zaproponował potrzebę metajęzyka. W 1921 r. we wstępie do *Traktatu logiczno-filozoficznego* Wittgensteina napisał, że język ma strukturę, „o której w tym języku nic nie może być powiedziane, ale może być inny język traktujący o strukturze pierwszego języka, posiadający nową strukturę, przy czym może nie być granicy dla tej hierarchii języków"[9]. Jednak, jak napisał Ivor Grattan-Guinness, „choć to jest jedna z najsubtelniejszych idei filozoficznych Russella, on nigdy nie zastosował jej do swojej własnej logiki"[10].

---

[8] Mianowicie „truth, falsity, inference" (Wang 1996, s. 266).

[9] „[...] every language has, as Mr. Wittgenstein says, a structure concerning which, in the language, nothing can be said, but that there may be another language dealing with the structure of the first language, and having itself a new structure, and that to this hierarchy of languages there may be no limit".

[10] „This is one of Russell's finest philosophical insights, yet he never properly thought of also applying it to his own logic, which he always saw as an all-embracing subject" (Grattan-Guinness 2011, s. 61).

Jean van Heijenoort (1967) określił opisane właśnie przeciwstawienie jako opozycję dwóch wizji: logiki „jako rachunku”, czyli – używając terminologii Leibniza – wyłącznie *calculus ratiocinator*, oraz logiki „jako języka”, czyli również *lingua characteristica*. Jaakko Hintikka uogólnił ten obraz, mówiąc o dwu podejściach: jedno traktuje język jako medium uniwersalne, a drugie jako rachunek, który można interpretować w różnych światach. W rozróżnieniu tych podejść widzi jeden z podstawowych sposobów dzielenia XX-wiecznych filozofów na dwa obozy. Do „uniwersalistów” należy, według niego, nie tylko Russell czy Wittgenstein, ale i Martin Heidegger, który też uważał, że nie można postawić się poza językiem[11]. Hintikka łączy z tym jeszcze rozróżnienie pomiędzy myśleniem o jednym, „naszym” świecie a rozważaniem różnych możliwych światów. Gdy reinterpretacja języka jest niemożliwa, język może być używany tylko do mówienia o świecie, tzn. o jedynym prawdziwym świecie. „W idei języka jako uniwersalnego medium zawiera się więc jakiś rodzaj założenia o jedyności świata”[12].

Gödel oczywiście rozumiał oba podejścia do logiki. Jego wkład do podejścia teoriomodelowego był zasadniczy, choćby z powodu jego dowodu twierdzenia o pełności dla logiki pierwszego rzędu. Hintikka początkowo wymienia go nawet jako jednego z tych, którzy pozostają w nurcie tego teoriomodelowego ujęcia logiki, a nawet twierdzi, że „przełom otwierający na cały ten teoriomodelowy sposób myślenia[13] był w dużej mierze dokonany dzięki Gödlowi” (Hintikka 1989; zob. też Hintikka 1997, s. 32). Tak też uważał Grattan-Guinness, który ten przełom odnosił do epokowej pracy Gödla o niezupełności (Grattan-Guinness 2011, s. 69). Jednak później Hintikka (2000) podkreślał z żalem, że Gödel pozostał wierny tradycji widzenia języka jako medium uniwersalnego oraz wizji jednego świata. Faktycznie, jak wspomniałem, okazywał on wyraźny brak zainteresowania teorią modeli w odniesieniu do logiki i teorii zbiorów oraz innych teorii fundamentalnych. Opisując rozróżnienie dwu wizji logiki, Hintikka podkreśla, że gdy język widzimy jako medium uniwersalne, „główną ofiarą zakazu metalogiki jest pojęcie prawdy” (Hintikka 1988, s. 2). Faktycznie, Gottlob Frege – podobnie jak przedtem Immanuel Kant – napisał: „Prawdę uważam za niedefiniowalną” (Frege 1969, s. 189; cyt. za: Frege 1977, s. 132). Takie podejście preferował Gödel i – mam wrażenie – je właśnie zobaczył w sformułowaniach zawartych w liście Russella. To mu się spodobało, niezależnie od tego, że Russell niewłaściwie zinterpretował twierdzenie o niezupełności. „Bardzo interesujące” jest dla Gödla – jak sądzę – to odwołanie się do wizji logiki jako aparatury wszechogarniającej,

---

[11] Prace Hintikki na ten temat są zebrane w tomie: Hintikka 1997.

[12] „Hence a kind of one-world assumption is implicit in the idea of language as the universal medium” (Hintikka 1997, s. xi).

[13] „the breakthrough of the entire model-theoretic *Denkweise*”.

uniwersalnej, oddającej naturę naszego, jedynego świata. Widzimy, że pojawia się tu temat „ogólnej filozofii matematyki", o której wspominał (z powątpiewaniem) Robinson.

Podejście teoriomodelowe stopniowo rozpowszechnia się, rozważanie wielu światów, możliwych światów, jest częste nie tylko wśród filozofów, ale nawet wśród fizyków. Pozostaje jednak nadal możliwe odmówienie takim spekulacjom doniosłości filozoficznej. Jak widzimy, czynił tak i Russell, i Gödel. Przyjmowali oni bowiem tradycyjny, a nie postmodernistyczny punkt widzenia: chodzi o to, co się dzieje w prawdziwym świecie, który jest jeden, a nie jest naszą konstrukcją, jedną z wielu możliwych. Nawet jeśli się z tym poglądem Russella nie zgadzamy, czasem warto sobie przypomnieć ów tradycyjny punkt wyjścia.

***

Omówiony tak szczegółowo przykład jest zapewne ciekawy tylko dla nielicznych osób, głównie dla filozofów zainteresowanych subtelnościami historii logiki. Jednak wskazuje on na problem ogólny, którym zainteresować się może każdy. Okazuje się, że błędna interpretacja (*misinterpretation*) może być ciekawa. I że może tak być nawet w tak ścisłej dziedzinie jak logika. Chodzi tu o logikę szeroko rozumianą, obejmującą również poglądy metalogiczne.

Pojawia się pytanie, czy interesująca, a zarazem błędna interpretacja jest też możliwa w odniesieniu do matematyki. A czy błąd pełnić może konstruktywną rolę? I można pytać, czy tak jest też w innych dziedzinach myśli, w tym w filozofii.

Jeśli chodzi o matematykę, to w pierwszej chwili nasuwa się teza, że błąd jest zgubny, a sprzeczność zabójcza. Skoro jednak nawet w logice sprawa nie jest tak oczywista, można domniemywać, że w matematyce może być podobnie. Gdy bowiem spojrzeć szerzej, dwa podejścia do teorii matematycznych mogą być ze sobą niezgodne, a zarazem oba mogą być ciekawe i płodne. Niezgodność, sprzeczność wskazywałaby na błąd. Mimo to sprzeczność staje się wówczas nie tyle zabójczym błędem, co raczej wskazówką, że wykorzystujemy wspomniane podejścia poza zakresem ich właściwej stosowalności. Najprostszy przykład takiej sytuacji to utożsamienie, które wszyscy czynimy od czasów szkolnych: $\frac{1}{3} = 0{,}3333...$ Po lewej stronie mamy liczbę ułamkową, po prawej wskazanie nieskończonego szeregu. Ułamek jest czymś zupełnie innym niż nieskończony proces. W jakim sensie są one równe? Nie jest to identyczność, bo są to obiekty innego typu. Stawiając znak równości, popełniamy zatem błąd. Jednak błąd ten jest interesujący, bo to utożsamienie jest cenne i daje postęp w matematyce. Zakładamy mianowicie, że ten szereg ma sumę, a wówczas widzimy, że musi ona być równa 1/3. Musimy jednak z góry przyjąć, że suma tego szeregu jest taką samą liczbą jak liczby ułamkowe. To jest twórczy krok, który musi być wykonany, żeby wspomniane utożsamienie nabrało sensu. W szkole przekonują nas do tego tak udatnie, że w zasadzie nie widzimy już problemu. Ale problem jest. Żeby o tym przekonać nawet tych, którym się wydaje, że nie ma sprawy, rozpatrzmy inny przykład. Tym razem zupełnie niestandardowy.

Można by mianowicie zapytać czemu równa się 0,3333...1, w którym po nieskończonym ciągu trójek następuje jedynka, albo na przykład 0,3333...1111..., gdzie pierwsze trzy kropki oznaczają nieskończony ciąg trójek, a drugie trzy kropki nieskończony ciąg jedynek. Powstający obrazek nie jest rozpoznawany jako właściwy, nie ma go w szkole, ani zresztą w matematyce uniwersyteckiej. Jednak dla ludzi obeznanych z ciągami pozaskończonymi, wprowadzonymi przez Georga Cantora, powinien być zrozumiały. Zarówno bowiem ciągi długości $\omega+1$, jak i ciągi długości $\omega+\omega$ są czymś normalnym w matematyce współczesnej. Takie ciągi, jak zaproponowany wyżej, nie zostały chyba wprowadzone, w każdym razie o tym nie słyszałem, choć są na tyle podobne do liczb nadrzeczywistych Johna Conwaya, zwłaszcza w ujęciu Harry'ego Gonshora (1986)[14], że być może ktoś je badał. Jeśli uznamy, że mają sens i reprezentują jakąś liczbę lub punkt na odcinku [0,1], pojawia się pytanie, jaka to liczba, jaki punkt. Widać, że to więcej niż 1/3, a zarazem mniej niż dowolny ułamek większy niż 1/3. Obie hipotetyczne liczby są więc nieskończenie bliskie 1/3. Przy tym pierwsza wydaje się oczywiście mniejsza niż druga.

Nie można nie zapytać: czy takie liczby istnieją? Wstępna odpowiedź brzmi: a czemu nie? Odpowiedź dokładniejsza zależy od tego, czy potrafimy konsekwentnie rozszerzyć pojęcie liczby rzeczywistej tak, ażeby uzyskać dobrą teorię. Sprawa nie jest z góry przesądzona. Jeśli się nie da, to mamy do czynienia z błędem; jeśli się da, to mamy do czynienia z interesującą ideą. Nawet jeśli się nie da, prawie na pewno można zliberalizować pojęcie „dobrej" teorii, żeby powstała jednak jakaś ciekawa teoria traktująca o liczbach w rozszerzonym sensie. To jest tak, jak było z liczbami zespolonymi i kwaternionami, które powstały jako rozszerzenie pojęcia liczby rzeczywistej, ale trzeba było pozbyć się pewnych przyjętych własności (odpowiednio: że kwadrat dowolnej liczby nie jest ujemny i że mnożenie jest przemienne). Jeśli to jest możliwe, a tak podejrzewam, to ów błąd byłby „bardzo interesującym" błędem.

Rozważania przykładów takich, jak $\frac{1}{3} = 0{,}3333...$[15], oraz wielu innych skłoniły Williama Byersa (2007) do postawienia mocnej tezy na temat rozwoju matematyki. Według niego twórcze idee pojawiają się w matematyce na skutek

[14] Conway zaprezentował (odkrył? wymyślił?) *surreal numbers* w 1972 r.

[15] Pozaskończonych rozwinięć dziesiętnych we wspomnianym stylu nie proponuje ani Byers, ani nikt, o kim wiem.

paradoksów, sprzeczności, niezgodności dwóch sposobów ujmowania jakiegoś zagadnienia. Brzmi to nieco po heglowsku, ale jest ilustrowane wyłącznie faktycznymi przykładami rozwoju teorii matematycznych.

Byers formułuje ponadto znaczne uogólnienie tych przykładów. Odnosi się to do filozofii matematyki bardziej niż do matematyki samej. Otóż wedle niego każda wielka idea jest fałszywa, czyli błędna. Zawsze powstaje bowiem tendencja do absolutyzowania tej idei, co skłania do stosowania jej tak szeroko, jak się da, a to nieuchronnie prowadzi do błędów. Doskonałym przykładem jest logicyzm, który w tak znacznej mierze został stworzony i rozpowszechniony przez Russella.

Zdefiniowanie podstawowych pojęć matematycznych w systemie, który Russell i Whitehead sformułowali jako system logiki, jest niewątpliwie wybitnym osiągnięciem. To skłoniło Russella do uznania, że matematyka jest logiką i niczym więcej. Otóż ta teza jest ewidentnie fałszywa dla matematyków, nawet tych – nie tak zresztą licznych – którzy są obznajomieni z logiką matematyczną. Wszyscy niemal uważamy, że trzeba rozróżniać matematykę od logiki, tak jak chemię od fizyki czy prozę od poezji. Jest tak wbrew oczekiwaniom Russella, który był pewny, że jego pogląd zostanie przyjęty powszechnie. Zobaczmy, jak dowodzi on tezy o tożsamości logiki i matematyki. W znanej książce *Introduction to Mathematical Philosophy* z 1919 roku pisze:

> Jeżeli są jeszcze ludzie, którzy nie uznają, że logika i matematyka to to samo, to możemy żądać od nich, żeby wskazali, gdzie w szeregu definicji i wywodów w *Principia Mathematica* według nich kończy się logika, a zaczyna matematyka. Okaże się wtedy, w sposób oczywisty, że każda odpowiedź na to pytanie ma charakter dowolny (Russell 1958, s. 285).

Choć sytuacja jest opisana trafnie, traktowanie tego jako dowodu prawdziwości logicyzmu jest błędne. Russell popełnia błąd logiczny. Błąd ten można nazwać następująco: „nie ma granicy, więc nie ma różnicy". Żeby to zilustrować, wyobraźmy sobie zaciemniony pokój. W jednym rogu jest zapalona świeczka. Przy niej można czytać książkę. W przeciwległym rogu jest na tyle ciemno, że nie da się czytać książki. Nie da się wskazać granicy, dzielącej przestrzeń czytelniczą od nieczytelniczej, ale są to niewątpliwie dwie osobne sfery[16]. Matematyka i logika to też dwie osobne sfery.

Jest coś żenującego w zarzuceniu błędu logicznego Russellowi, znanemu przecież ze ścisłości myślenia. Jednak nie wiem, jak inaczej rzecz ująć. Zarazem można i w tym przypadku powiedzieć, że błąd jest interesujący. Wskazana jest bowiem ciekawa i nieoczywista przesłanka – ciąg wywodów, który zaczyna się od logiki, a staje się matematyką. Tę przesłankę stworzył sam Russell i inni „ojcowie-założyciele" logicyzmu, i jest ona osiągnięciem, do którego ciągle się odwołujemy. W jego oczach dowodzi to tezy „logika = ma-

[16] Przykład ten zaczerpnąłem z rozmowy z Richardem Epsteinem.

tematyka". Logicyzm pozostaje wielką ideą, ale chęć zastosowania jej tak daleko, jak się da, objęcia w ramionach logiki całej matematyki, daje fałsz. Jak chciał Byers, wielka idea skłania ku nadmiernemu uogólnieniu. To błąd, ale również na tym ciążeniu ku absolutyzacji polega jej wielkość.

I trudno jest nie ulec chęci uogólnienia tej obserwacji Byersa. Może jest więc tak, że każda wielka idea filozoficzna jest fałszywa, bo skłania do niedopuszczalnego rozszerzenia jej stosowania poza właściwy jej zakres stosowalności. Ale musimy dodać, że tak właśnie sformułowane uogólnienie jest najprawdopodobniej fałszywe. Bo nadmiernie zuniwersalizowane. Nie omieszkajmy jednak zauważyć, jak bardzo interesujący jest to fałsz...

Bibliografia

Byers W. (2007), *How Mathematicians Think; Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics*, Princeton: Princeton University Press.

Conway J.H. (2001), *On numbers and games*, wyd. 2, Notick, MA: A.K. Peters – CRC Press.

Dawson J.W. (1985), *Completing the Gödel-Zermelo correspondence*, „Historia Mathematica" 12, s. 66–70.

Frege G. (1969), *Nachgelassene Schriften*, red. H. Hermes, F. Kambartel, F. Klaubach, Hamburg: Felix Meiner.

Frege G. (1977), *Pisma semantyczne*, przeł. B. Wolniewicz, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Gonshor H. (1986), *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*, London Mathematical Society, Cambridge: Cambridge University Press.

Gödel K. (1986–2003), *Collected Works*, red. S. Feferman i in., t. I–V, Oxford – New York: Oxford University Press.

Grattan-Guinness I. (2000), *The Search for Mathematical Roots 1870–1940: Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton: Princeton University Press.

Grattan-Guinness I. (2011), *The Reception of Godel's 1931 Incompletability Theorems by Mathematicians, and Some Logicians, to the Early 1960s*, w: M. Baaz i in. (red.), *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics. Horizons of Truth*, New York: Cambridge University Press, s. 57–74.

Heijenoort J. van (1967), *Logic as Calculus and Logic as Language*, w: R. Cohen, M. Wartofsky (red.), *Boston Studies in the Philosophy of Science*, Dordrecht: Reidel, s. 440–446; tłum. pol.: *Logika jako rachunek i logika jako język*, przeł. C. Cieśliński, w: J. Woleński (red.), *Filozofia logiki*, Warszawa 1997, s. 71–78.

Hintikka J. (1988), *On the development of the model-theoretic viewpoint in logical theory*, „Synthese" 77, s. 1–36.

Hintikka J. (1989), *Is Truth Ineffable?*, w: N. Scardona (red.), *Les Formes Actuelles du Vrai: Entretiens de Palermo*, Palermo: Enchiridion, s. 89–120.

Hintikka J. (1997), *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presuppostion of Twentieth-Century Philosophy*, Dordrecht: Kluwer.
Hintikka J. (2000), *On Gödel*, Wadsworth Philosophers Series, Belmont, CA: Cengage Learning.
Krajewski S. (2003), *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne – od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Warszawa: Wydawnictwo IFiS PAN.
Krajewski S. (2004), *Gödel on Tarski*, „Annals of Pure and Applied Logic" 127, s. 303–323.
Murawski R. (2000), *Kontekst historyczny i recepcja twierdzeń Gödla o niezupełności*, w: J. Hartman (red.), *Filozofia i logika. W stronę Jana Woleńskiego*, Kraków: Aureus, s. 414–426.
Russell B. (1958), *Wstęp do filozofii matematyki*, przeł. Cz. Znamierowski, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
Shanker S.G. (red.) (1988), *Gödel's Theorem in focus*, London: Croom Helm.
Wang H. (1996), *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*, Cambridge, MA: The MIT Press.
Woleński J. (red.) (1997), *Filozofia logiki*, przeł. C. Cieśliński, A. Sierszulska, Warszawa: Wydawnictwo Spacja – Fundacja Aletheia.

Stanisław Krajewski

Russell's 'very interesting misinterpretation'?

Keywords: *defining truth, K. Gödel, great mathematical idea, L. Henkin, incompleteness, interesting error, logical fallacy, model theory, A. Robinson, B. Russell, semantics, A. Tarski, universality of logic*

According to Kurt Gödel, Bertrand Russell misinterpreted the incompleteness theorem, but did it in 'a very interesting manner'. To understand what he meant we need to consider their attitudes to defining truth. Even more revealing is the discussion of two fundamental approaches to logic: one is universalistic, and assumed by both Russell and Gödel, and the other is model-theoretical, Alfred Tarski's style. It turns out that a misleading or erroneous interpretation can be interesting, as it reveals something fundamental. William Byers claims that truly great ideas in mathematics and about mathematics are in a way false, as they lead to errors, but at the same time they can help to make advances in math. Logicism provides a good example. In addition it may be mentioned that when Russell argued in its favor, he committed a logical fallacy.