Multistabilność jako źródło nieprzewidywalności w układach dynamicznych

Niestabilne jak wahadło

TOMASZ KAPITANIAK
Katedra Dynamiki Maszyn Politechniki Łódzkiej
Komitet Mechaniki
Polskiej Akademii Nauk
tomaszka@p.lodz.pl

Czy można przewidywać zachowanie się układów ewoluujących? Niekiedy może to być proste, jak w przypadku zwykłego, lekko odchylonego wahadła. Są jednak układy, dla których praktycznie nie sposób określić stanu końcowego

Praktycznie dla każdego układu istnieje pewien pożądany zestaw warunków pracy. Projektując urządzenia inżynieryjne zakładamy zazwyczaj, że będą one pracować właśnie w takich warunkach. Niestety, dla układów nieliniowych nie zawsze można zagwarantować pracę w warunkach pożądanych. Trzeba być przygotowanym na to, że niepożądane warunki mogą doprowadzić do uszkodzenia układu. Taką właśnie sytuację możemy napotkać przy modelowaniu systemów biologicznych lub geofizycznych. Może okazać się, że rozpatrywany system działa w szeregu różnych stanów, o różnym znaczeniu, np. stan życia i śmierci w układach biologicznych, albo stan złej lub dobrej pogody w geofizyce. Modelowanie takich procesów prowadzi się zazwyczaj korzystając z matematycznego pojęcia atraktora.

Atraktor - to podstawowe pojęcie w teorii układów dynamicznych. Rozpatrzmy układ dynamiczny $dx/dt = f(x)$, gdzie funkcja $f(x)$ spełnia warunek ciągłości konieczny dla istnienia jednoznacznego rozwiązania, gdy x należy do R^n; ta n-wymiarowa przestrzeń rzeczywista nazywana jest przestrzenią fazową równania. Minimalny podukład R^n, A, taki że $x(t) \to A$, gdy $t \to \infty$, nosi nazwę atraktora. Typowymi atraktorami są punkty stałe (równowagi), cykle graniczne (zachowanie periodyczne) i dziwne atraktory (zachowanie chaotyczne).

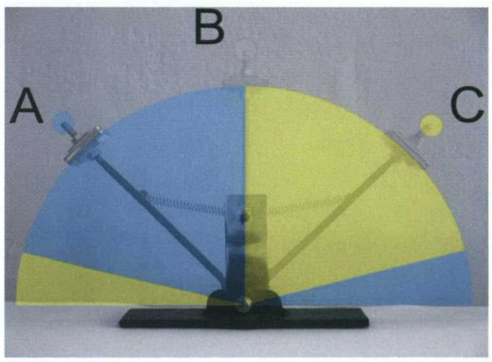
Prof. Tomasz Kapitaniak, specjalista w dziedzinie inżynierii mechanicznej, dynamiki i chaosu, bada wiele zagadnień z dziedziny dynamiki nieliniowej takich jak chaos, mechanika stochastyczna, drgania nieliniowe i synchronizacja systemów

Jedną z typowych cech układu nieliniowego jest występowanie atraktorów współistniejących. Znaczy to, że dla danego zestawu wartości parametrów, zależnie od warunków początkowych, układ może dążyć do różnych atraktorów. Cechę tę nazywamy multistabilnością. By zrozumieć zachowanie dynamiczne takich systemów, konieczne jest obliczenie basenu przyciągania dla każdego współistniejącego atraktora. W wielu wypadkach struktura tych basenów i ich bifurkacje prowadzą do nieoczekiwanej nieoznaczoności dynamicznej; *a priori* nie można przewidzieć, na bazie którego atraktora system będzie ewoluował. Poniżej opiszemy kilka takich przypadków.

Jeden z najprostszych układów mechanicznych, z możliwością wystąpienia więcej niż jednego atraktora, to odwrócone wahadło. Jak pokazano na ilustracji, możliwe są trzy położenia równowagi, A, B i C. Położenia A i C są atraktorami, a B jest położeniem równowagi nietrwałej. Baseny atraktorów A i C zaznaczono odpowiednio kolorem niebieskim i żółtym. Granice basenów są dobrze określone; stanowią je linie proste. Załóżmy, że warunki początkowe mogą być określone z dokładnością ε, tak że gdy warunki początkowe wychodzą poza pasmo o szerokości ε wokół granic, możemy łatwo przewidzieć, ku któremu atraktorowi układ będzie ewoluował.

Z bardziej skomplikowanym przypadkiem mamy do czynienia, gdy granica basenu ma strukturę fraktalną. Przykładem tej sytuacji jest dynamika wahadła wymuszonego zewnętrznie, przedstawiona na rys. 3.

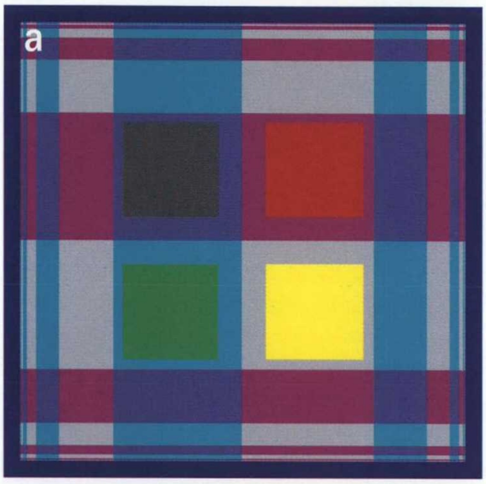
T. Kapitaniak



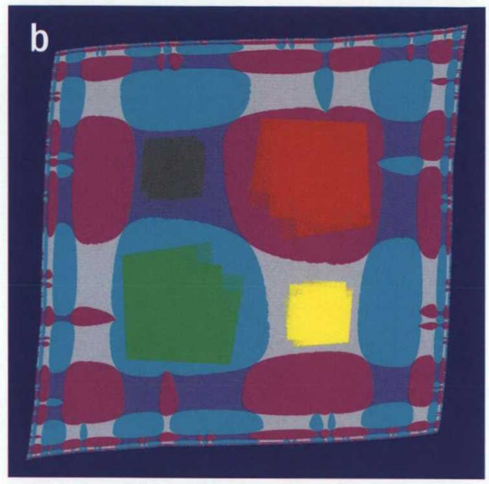
Rys. 1. Wahadło odwrócone i baseny przyciągania jego atraktorów: jeżeli stan początkowy wypada w obszarze niebieskim, system z czasem zatrzyma się w punkcie A; stany początkowe z obszaru żółtego doprowadzą do punktu C

Multistabilność jako źródło nieprzewidywalności w układach dynamicznych

Istnieją takie warunki, przy których wahadło wykonuje obroty zgodnie i przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Te dwa atraktory periodyczne przedstawione są odpowiednio jako A i B, a ich baseny przyciągania zaznaczono kolorem fioletowym i bladoniebieskim.

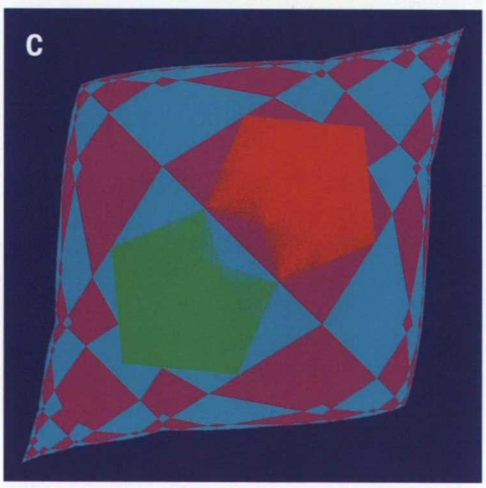


$d_1 = d_2 = 0$, x (-2, 2), y (-2, 2)

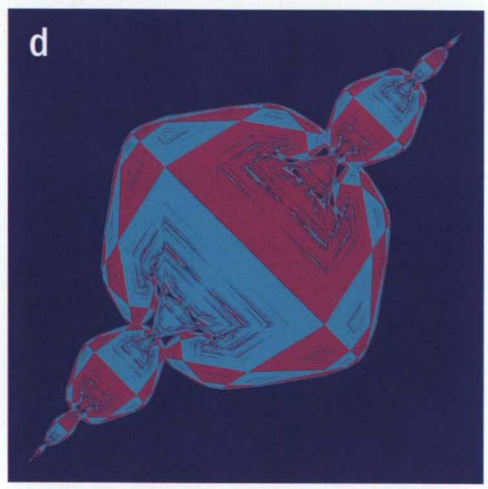


$d_1 = d_2 = 0.11$, x (-2, 2), y (-2, 2)

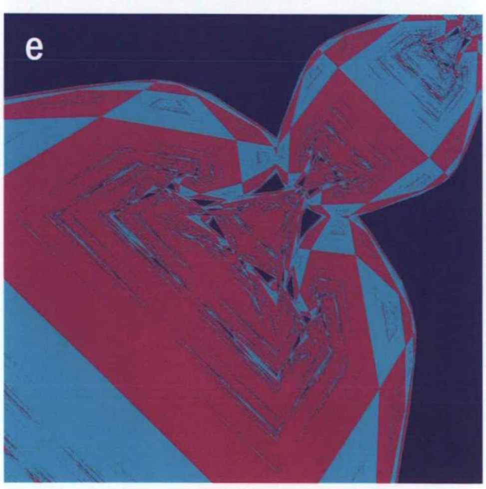
T. Kapitaniak



$d_1 = d_2 = 0.26$, x (-2, 2), y (-2, 2)



$d_1 = d_2 = 0.65$, x (-2, 2), y (-2, 2)



$d_1 = d_2 = 0.65$, x (-0.5, 1.5), y (-0.5, 1.5)

$d_1 = d_2 = 0.65$, x (0.5, 1.5), y (0.5, 1.5)

Rys. 2. Baseny przyciągania atraktorów dla układów dynamicznych omówionych w tekście. Cztery symetryczne atraktory chaotyczne, widoczne początkowo na rysunku (a) jako obszary ciemnozielone, zielone, żółte i czerwone, zostają zachowane w przypadku słabego sprzężenia (b), ale znikają w miarę wzmocnienia sprzężenia (c,d). Atraktory z dala od głównej przekątnej x = y, zanikają pierwsze. Jeżeli układ ewoluuje w stronę jednego z atraktorów, które następnie ulegają zniszczeniu, nie można przewidzieć do którego z pozostałych atraktorów prowadzić będzie trajektoria systemu

W tym wypadku granica basenu ma strukturę fraktalną. Znaczne obszary przestrzeni fazowej mają tę właściwość, że w dowolnym otoczeniu danego punktu, należącego do basenu jednego atraktora, istnieją punkty należące do basenu drugiego atraktora. W takich obszarach nie sposób przewidzieć trajektorii systemu jedynie na podstawie znajomości warunków początkowych z dokładnością ε, choć istnieją pewne obszary, np. bezpośrednie otoczenie atraktora, w których przewidywania są możliwe.

Najtrudniej o przewidywania w układach dynamicznych, które mogą zmieniać atraktory w rezultacie zniszczenia atraktora początkowego, albo na skutek nieskończenie małego zaburzenia zewnętrznego. Przypadki takie można opisać na przykładzie poniższego dyskretnego układu dynamicznego (dwuwymiarowej mapy) opisanego wzorami:

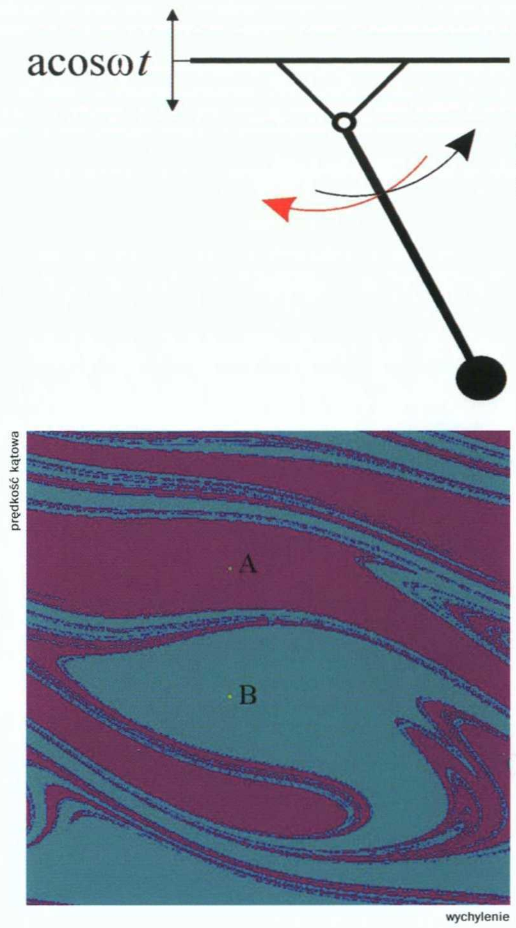
$$x_{n+1} = px_n + l/2\,(1 - p/l)\,(|x_n + 1/l| - |x_n - 1/l|) + d_1(y_n - x_n)$$
$$y_{n+1} = py_n + l/2\,(1 - p/l)\,(|y_n + 1/l| - |y_n - 1/l|) + d_2(x_n - y_n)$$

Dla $d_{12} = 0$, $F_{l,p}(0)$ posiada cztery symetryczne atraktory chaotyczne A_i; $i = 1,4$ w obszarze $I \times I$, gdzie $I = [2; 2]$. Atraktory, wraz ze swymi basenami przyciągania, przedstawione są na rys. 2a. Baseny atraktorów A_1 (ciemnoszary) A_2 (czerwony), A_3 (zielony) i A_4 (żółty) zaznaczono odpowiednio kolorami ciemnoniebieskim, fioletowym, jasnoniebieskim i jasnoszarym, zaś basen przyciągania nieskończoności zaznaczono kolorem granatowym.

Eksperyment komputerowy, którego wyniki pokazano na rys. 2b-d wykazuje, że tego typu atraktory zachowują się przy słabym sprzężeniu $|d_{12}| \ll 1$ (rys. 2b), a zanikają w miarę wzrostu sprzężenia (rys. 2c, d). Na początku zanikają atraktory odległe od głównej przekątnej, czyli A_2 i A_4 (rys. 2c).

Załóżmy, że dany układ dynamiczny ewoluuje na podstawie jednego z atraktorów, ale atraktor ten ulega rozpadowi. Wówczas niemożliwe staje się przewidzieć, do którego z pozostałych atraktorów zmierzać będzie trajektoria układu. Zniszczenie jednego atraktora - gdy pozostają co najmniej dwa inne - nazywane jest bifurkacją wielokrotną: jest to źródło nieprzewidywalności dynamicznej.

Na rys. 2d widzimy że $x = y$ i dwuwymiarowe atraktory zredukowane zostają do dwu symetrycznych atraktorów jednowymiarowych na głównej przekątnej $x = y$. Na powiększeniu na rys. 2e-f widzimy, że w dowolnym otoczeniu atraktora A (lub B) istnieją punkty, które należą do basenu drugiego atraktora B (lub A). W takim przypadku basen A (B) jest podziurawiony przez basen B (A). Podziurawione baseny prowadzą do innej możliwej niepewności dynamicznej, gdy trajektoria systemu ewoluującego ku jednemu atraktorowi może przełączyć atraktory w rezultacie małego zaburzenia zewnętrznego.



Rys. 3. Układ wahadła zaburzonego zewnętrznie (powyżej) i baseny przyciągania jego atraktorów w przestrzeni warunków początkowych (poniżej)

Tak więc multistabilność jest częstym zjawiskiem w układach dynamicznych - takich jak układy mechaniczne z uderzeniami i tarciem suchym, elektryczne obwody nieliniowe, modele biologiczne i ekonomiczne. Można oczekiwać, że w takich układach wystąpią opisane wyżej niepewności dynamiczne. W układach, w których mamy do czynienia z szumami, niepewności takie mogą prowadzić do nieoczekiwanych zjawisk, niekiedy o dramatycznym charakterze. Zjawiskom niepewności dynamicznych poświęcony jest obecnie szeroki program badań na skalę światową. ■

Chcesz wiedzieć więcej?

Nusse H.E., Yorke J.A. (1994). *Dynamics: Numerical Explorations*. New York: Springer Verlag.
Kapitaniak T. (2000). *Chaos for Engineers: Theory, Applications and Control*, New York: Springer Verlag.