DOI: 10.24425/academiaPAN.2021.138628

Matematyka i sztuka

Matematyka i sztuka wydają się bardzo odległe, wręcz przeciwstawne, jednak w rzeczywistości łączy je bardzo wiele. Jakie są te związki i z czego wynikają?


ANNA SZWAJA

prof. Robert A. Wolak
Jest profesorem nadzwyczajnym w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego i prezesem Stowarzyszenia Przyjaciół Akademii Sztuk Pięknych w Krakowie. W latach 2014–2016 był członkiem zarządu Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Zajmuje się topologicznymi i geometrycznymi aspektami teorii foliacji.
robert.wolak@uj.edu.pl

Robert A. Wolak

Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

By dobrze zrozumieć wzajemne zależności matematyki i sztuki oraz wzajemne wpływy, trzeba sobie uzmysłowić, czym jest matematyka, a czym sztuka. To, czego uczy się w szkole, daje małe pojęcie o tym, czym była matematyka historycznie, a już zupełnie niewielkie o tym, jaką nauką jest obecnie.

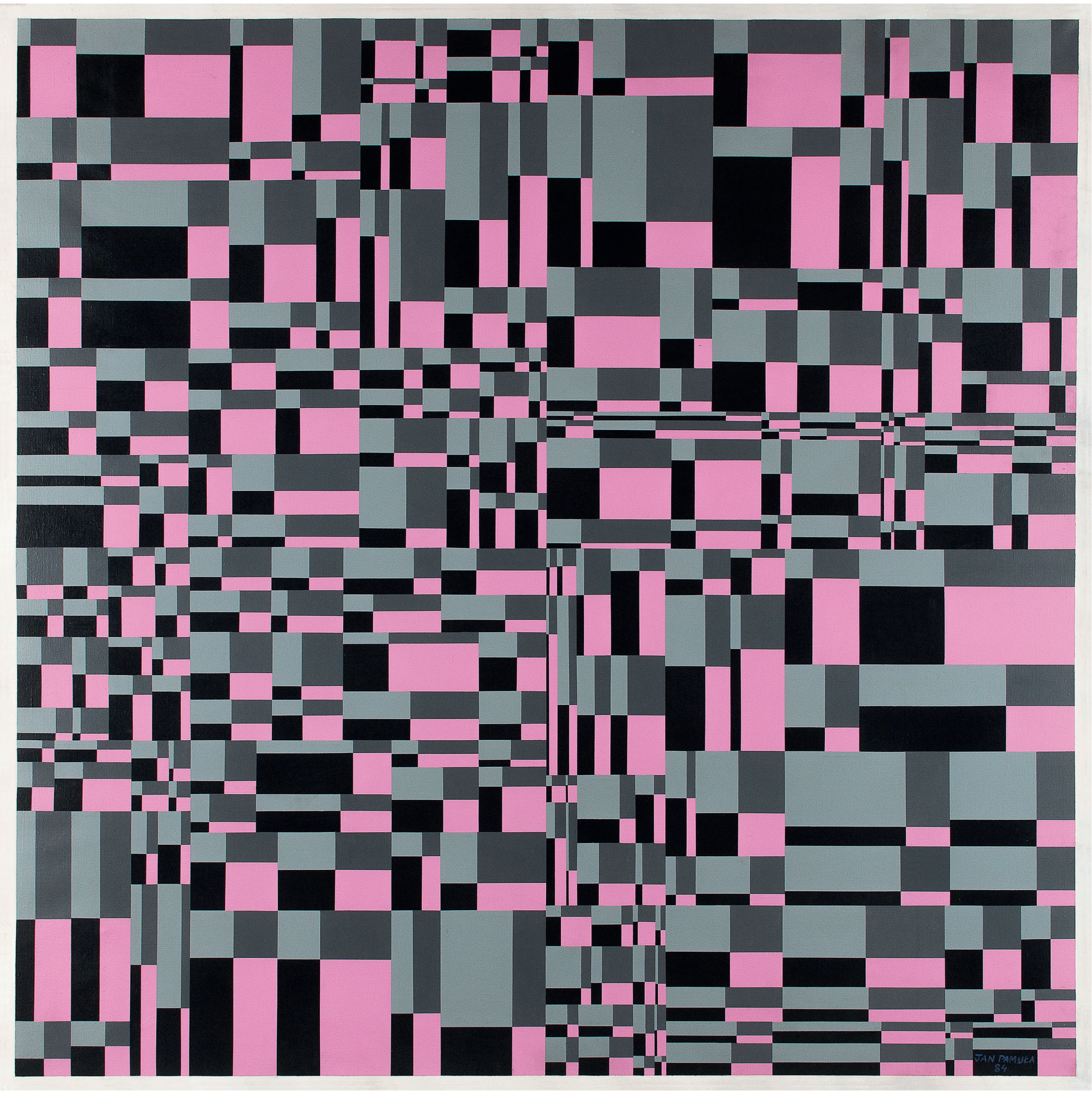
Czym była matematyka?

Historycznie ujmując, pierwotnie w Egipcie i Babilonii matematyka dawała narzędzia opisu świata, tworzyła procedury ich zastosowania w odpowiedzi na pytania i problemy pojawiające się przed człowiekiem. Operowano liczbami i konkretnymi figurami geometrycznymi o podanych wymiarach. W starożytnej Grecji rozwinęło się odmienne, abstrakcyjne podejście do tej nauki. Była ona oparta na filozofii i badała obiekty idealne, nie konkretne. Bardzo ważną rolę odegrał Pitagoras i szkoła mistyczno-matematyczna, którą założył w Krotonie w 529 roku p.n.e. Platon w dialogu *Timajos* pisał, że Bóg stworzył świat według „idei" („formy") i „liczby". Podobno nad wejściem do Akademii Platońskiej znajdował się napis: „Niech nie wchodzi tu nikt, kto nie zna się na geometrii". Geometria i matematyka były uważane za podstawę wszelkich nauk, narzędzie do opisu świata, a zatem za drogę do prawdziwej wiedzy, poznania Stworzyciela czy też prawdziwego świata, tego, którego jedynie cienie widzimy. Summą tej abstrakcyjnej nauki są *Elementy* Euklidesa. Geometria płaska i przestrzenna, tak jak jest przedstawiona w *Elementach,* przez ponad 2000 lat była uważana za niedościgniony wzór teorii naukowej, nie tylko matematycznej. Liczni uczeni i myśliciele próbowali przedstawić w ten idealnie logiczny sposób, przyjmując pewne pojęcia pierwotne i aksjomaty, teorie wielu różnych dziedzin nauki, w tym także teologii.

Definicja sztuki

Nauka ma swoje wypracowane obiektywne narzędzia. Ale czym jest sztuka? Jest wiele teorii. Czym się różni „prawdziwa" sztuka od rzemiosła, od produkcji przedmiotów dekoracyjnych, umilających życie? Czy się różni? Czy jest to także sztuka? Czy sztuką jest „mówienie" o sobie? Można postawić wiele takich pytań i jest na nie wiele różnych odpowiedzi. Nurt, mający swoje korzenie w tradycji hellenistycznej, wskazuje, że artysta powinien szukać prawdziwych idei. Zatem uczony i artysta mają za zadanie poznanie świata, lecz dysponują innymi narzędziami. Uczony jest ograniczony przez użycie „obiektywnych" narzędzi, a artysta nie jest ograniczony tym obiektywizmem.

Artyści greccy okresu klasycznego, pragnąc przedstawić świat idei, boskie uniwersum, sięgnęli po teorie matematyczne, uważali, że piękna postać mężczyzny czy kobiety musi być harmoniczna, tj. proporcjonalna, każdy element ciała musi być w takiej samej proporcji do pozostałych. Stąd też kanon rzeźby Polikleta dla męskiej postaci. Także w architekturze proporcje



PIOTR HREHOROWICZ

Jan Pamuła,
Seria komputerowa I, 1984,
akryl na płótnie,
120×120 cm, kolekcja
Renaty i Grzegorza Królów

odgrywały ważną rolę, w tym w szczególności złoty podział, „boska proporcja". Można je odnaleźć w architekturze starożytnego Rzymu, budowlach z islamskiego kręgu kulturowego czy też w dziełach architektów XX wieku.

Parkietaż i sztuka islamu

Ortodoksyjny islam zabrania przedstawiania w sztuce człowieka, a ogólniej – stworzenia. Dzięki temu rozwinęła się niezwykle wysublimowana sztuka dekoracyjna o silnym podtekście mistycznym. Przez wieki pokrywano abstrakcyjnymi mozaikami setki metrów kwadratowych ścian pałaców, budynków publicznych i meczetów. Zadziwiająca jest różnorodność form i bogactwo kolorów. Jednocześnie narzuca się odczucie porządku i symetrii.

Matematycy, patrząc na nie, zadawali sobie pytanie, czy to już wszystko, co można wymyślić? Czy są jeszcze inne, w miarę regularne wypełnienia obszaru płaskiego? Najpierw przyjęto założenie, że musimy wypełnić całą nieograniczoną płaszczyznę kafelkami jednego typu będącymi regularnymi wielokątami. Co więcej, przyjęto, że kafelki te muszą się stykać wyłącznie całymi bokami. W ten sposób powstało pojęcie parkietażu. Wierzchołki tych wielokątów tworzyły regularną siatkę punktów wypełniających całą płaszczyznę. Ich układ determinował parkietaż. Później rozluźniano pewne rygory, dopuszczano np. kilka typów kafelków. Za każdym razem otrzymywano „regularną" siatkę punktów wypełniających płaszczyznę. Matematycy postawili sobie pytanie: ile typów takich siatek punktów istnieje? Zauważono, że każdy typ siatki ma określoną grupę symetrii, grupę ruchów sztywnych, izometrii płaszczyzny, które przekształcają punkty danej siatki na punkty tej samej siatki. Takie grupy nazwano płaskimi grupami krystalograficznymi, a Jewgraf Fiodorow w 1891 roku i niezależnie George Pólya w 1924 roku udowodnili, że istnieje dokładnie 17 typów tych grup. W drugiej połowie XX wieku wielu matematyków odwiedzających Alhambrę odnajdywało kolejne typy płaskich grup krystalograficznych na ścianach pałacu. W końcu udało się pokazać, że wszystkie 17 typów grup można znaleźć jako grupy symetrii wybranych dekoracji ścian Alhambry, oczywiście przy założeniu, że te dekoracje nie są ograniczone i wypełniają całą płaszczyznę.

> Uczony i artysta mają za zadanie poznanie świata, lecz dysponują innymi narzędziami. Uczony jest ograniczony przez użycie „obiektywnych" narzędzi. Artysta nie jest ograniczony tym obiektywizmem.

Architektura gotyku

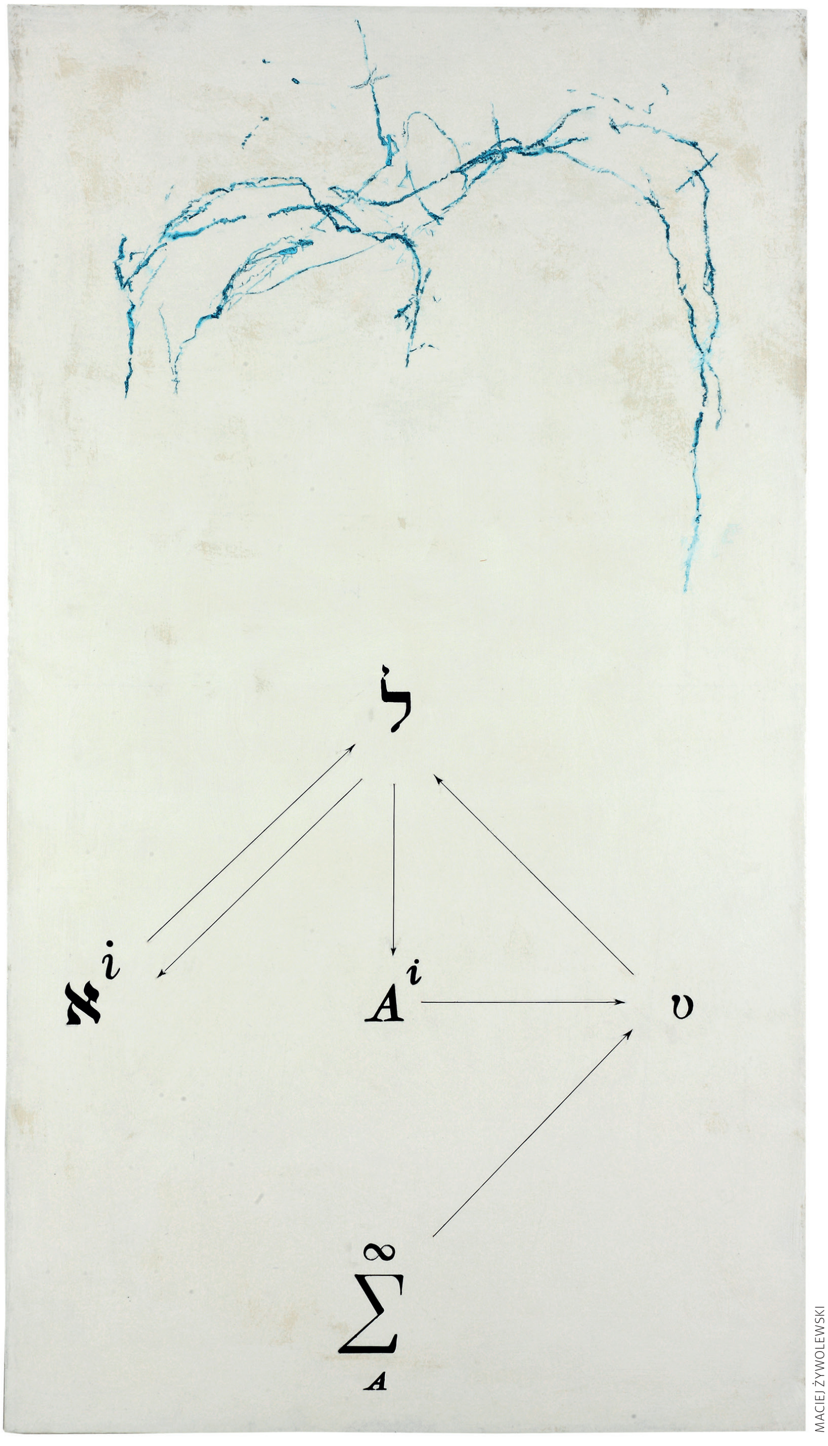
Kolejnym przykładem wpływu matematyki na sztukę są budowle gotyckie. W Europie X i XI wieku znajomość geometrii greckiej, a w szczególności *Elementów* Euklidesa, była bardzo ograniczona. Prawdopodobnie nie znano nawet twierdzenia Pitagorasa. Dopiero rekonkwista na Półwyspie Iberyjskim, a w szczególności odbicie Toledo, centrum kultury i nauki, z rąk arabskich w 1085 roku pozwoliło na zmianę tej sytuacji. Na początku XII wieku Raymond, arcybiskup Toledo, utworzył szkołę tłumaczy. Jej zadaniem było tłumaczenie z języka arabskiego na łacinę wszelkiego typu ksiąg naukowych, zarówno autorów greckich, jak i arabskich czy żydowskich. Tam też po raz pierwszy przetłumaczono na łacinę wiele traktatów Arystotelesa, a także *Elementy* Euklidesa. Na powstających wtedy uniwersytetach matematyka była nauczana w ramach *quadrivium* (tj. działu sztuk wyzwolonych, obejmującego arytmetykę, geometrię, astronomię i muzykę) i stanowiła podstawę wiedzy. Wystarczy spojrzeć na coraz to bardziej wyrafinowane maswerki kościołów gotyckich, by zrozumieć, że bez głębokiej recepcji *Elementów* Euklidesa w kręgach zleceniodawców i architektów, budowniczych katedr nie byłoby to możliwe.

Architektura renesansu

Kilka wieków później, we Florencji, stojąc na schodach katedry, Filippo Brunelleschi zastanawiał się, jak najlepiej przedstawić na obrazie florenckie baptysterium i plac znajdujący się przed nim. Zapewne znał *Optykę* Euklidesa i dzieło *Perspectiva* Vitelliusa (Erazma Ciołka). Wiedział, że światło rozchodzi się wzdłuż linii prostych i by odtworzyć na płaszczyźnie obrazu rzeczywisty przedmiot, trzeba przez źrenice oka i punkty tego przedmiotu poprowadzić proste. Punkty przecięcia tych prostych z płaszczyzną obrazu utworzą obraz przedmiotu, a oko oglądającego rozpozna przedmiot. Jednak, by iluzja była pełna, oczy widza muszą się znajdować w dokładnie tym samym miejscu co oczy artysty tworzącego to iluzyjne przedstawienie. Gdy według tej zasady przedstawia się posadzkę wnętrza wyłożoną kwadratowymi płytkami, staje się coś zaskakującego. Płytki te tworzą dwie rodziny prostych równoległych, które są wzajemnie prostopadłe. Umieśćmy płaszczyznę obrazu prostopadle do płaszczyzny posadzki, ale tak, by dolna krawędź była równoległa do prostych jednej z tych rodzin. Na obrazie pojawiają się one jako proste równoległe do dolnej krawędzi, a proste z drugiej rodziny nie będą równoległe, przecinają się w jednym punkcie, tam gdzie prosta przechodząca przez źrenicę oka artysty i prostopadła do płaszczyzny obrazu przetnie tę płaszczyznę. Zatem ten punkt na obrazie nie odpowiada żadnemu punktowi przedstawianej sceny, będzie obrazem punktu poza przestrzenią, obrazem nieskończoności. Ten punkt niepokoił artystów, teologów i filozofów. W tym czasie we Florencji przebywał Mikołaj z Kuzy, kardynał, matematyk i filozof, jeden z pierwszych uczonych, którzy zastanawiali się nad pojęciem nieskończoności. Z punktu widzenia teologicznego fascynowało go, jak nieskończony, nieograniczony Bóg mógł się wcielić w skończonego, ograniczonego człowieka. I chyba nie jest przypadkiem, że najbardziej rygorystyczne przedstawienia perspektywy liniowej, z wyraźnym punktem zbiegu można znaleźć w przedstawieniach zwiastowania. Wkrótce perspektywa liniowa stała się podstawowym elementem języka malarza, powstawały podręczniki uczące, jak poprawnie tworzyć siatkę linii w obrazie i jak w tę siatkę wpisywać przedmioty i postacie tak, by iluzja przestrzenna była przekonująca. Pojawiła się anamorfoza, oparta na wyborze bardzo nietypowych punktów widzenia czy też płaszczyzn obrazu będących powierzchniami bocznymi stożka. W tym miejscu warto wspomnieć, że pierwszym traktatem na temat anamorfozy jest niewielka książka *Perspectivae stereo pars specialis* Jana Ziarnka (urodzonego około 1575 roku we Lwowie, zmarłego około 1630 roku w Paryżu), opublikowana w Paryżu w 1619 roku i wzorowana na *Elementach* Euklidesa, z twierdzeniami i dowodami. Wszystkie te traktaty proponowały konstrukcje siatek linii, przez oko odczytywanych jako dwie rodziny prostych równoległych, które są wzajemnie prostopadłe. Autorzy starali się podać geometryczne uzasadnienia tych konstrukcji. Jedna z najwygodniejszych i najprostszych konstrukcji wymykała się tym wysiłkom. Dopiero Abraham Bosse w książce *Manière universelle de Monsieur Desargues pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral, Ensemble les places et proportions des fortes & faibles touches, teintes ou couleurs* (Paryż 1648) podał dowód poprawności tej konstrukcji oparty na twierdzeniu Desarques'a, jednego z podstawowych twierdzeń pierwotnej geometrii rzutowej. Dowód tego twierdzenia jest także przedstawiony po raz pierwszy w druku w tym traktacie. Jak się okazuje, perspektywa liniowa, punkt zbiegu – punkt w nieskończoności, perspektywa dziwaczna – anamorfoza, znajdują swoje ostateczne uzasadnienie w geometrii rzutowej, gdzie płaszczyzna czy przestrzeń wymiaru trzy jest uzupełniana o punkty w nieskończoności, które odpowiadają klasom równoległości prostych. W przestrzeniach tych są rozważane odwzorowania perspektywiczne oparte na pękach prostych, dokładnie jak jest to w przypadku perspektywy malarskiej, gdzie odwzorowanie jest oparte na pęku prostych wychodzących ze źrenicy oka. I nie jest przypadkiem, że Kartezjusz, Gérard Desargues, Blaise Pascal, Abraham Bosse, a prawdopodobnie także Jan Ziarnko, wszyscy dobrze się znali i spotykali w Académie Parisienne Marina Mersenne'a.

Kubizm

Druga połowa XIX i początek XX wieku to okres fascynujących przemian w nauce i sztuce. Prace Nikołaja Łobaczewskiego, Jánosa Bolyaiego i Bernharda Riemanna podważyły powszechne przekonanie o euklidesowości świata, w którym żyjemy. Do powszechnej świadomości dotarła informacja, że wszechświat może być zakrzywiony, a czas można uważać za czwarty wymiar przestrzeni. Wydaje się, że obecnie bardzo trudno zrozumieć szok, jaki wywołało opublikowanie przykładów geometrii nieeuklidesowych. Upadł wtedy cały wspaniały gmach fizyki i astronomii modelowany na przestrzeniach euklidesowych. Zakrzywiona czasoprzestrzeń Hermanna Minkowskiego, w popularnym ujęciu, umożliwiała podróże w czasie i przestrzeni. Świat, w którym żyjemy, mógł mieć wiele więcej wymiarów niż trzy lub cztery. Geometrzy zastanawiali się, jak można sobie wyobrazić bryły w wymiarach czwartym lub piątym. W Paryżu popularna była książka Esprita Joufreta *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions et introductionà la géométrie à n dimensions* (1903), opisująca wielościany,



MACIEJ ŻYWOLEWSKI

Marian Warzecha,
Bez tytułu, 1973,
technika mieszana,
115×65 cm.
Dzięki uprzejmości
Galerii Nautilus

np. kostkę, wymiaru czwartego za pomocą rzutów otoczeń jej wierzchołków na różne płaszczyzny wymiaru trzeciego. Znaczącą rolę w upowszechnianiu w Paryżu nowych pojęć matematycznych i odkryć naukowych odegrał Henri Poincaré, poświęcający wiele czasu i energii na popularne, ogólnodostępne wykłady, które przyciągały tłumy. W tym też czasie awangardowy poeta Guillaume Apollinaire de Kostrowitzky, broniąc swoich przyjaciół, Pablo Picassa i Georges'a Braque'a, pisał w *Les Peintres Cubistes*: „Można powiedzieć, że geometria jest tym dla sztuk plastycznych, czym gramatyka dla sztuki pisarstwa". Malarstwo kubistów drastycznie się różni od sztuki poprzednich okresów. Jego korzenie upatruje się w sztuce Paula Cezanne'a, w idolach z Cyklad czy w rzeźbie i maskach Afryki Subsaharyjskiej. Wszystko to prawda, wiele aspektów sztuki kubistycznej można tym uzasadnić. Trudno jednak wytłumaczyć jeden z najważniejszych elementów malarstwa kubistycznego – przedstawianie jednocześnie na płaszczyźnie obrazu przedmiotu z różnych punktów widzenia. To wydaje się bezpośrednio zapożyczone z praktyk geometrów ówczesnego czasu.

Jest spora grupa artystów poszukująca w matematyce inspiracji na głębszym poziomie, dla których procesy matematyczne są źródłem czy natchnieniem w procesie twórczym.

Polska sztuka współczesna

Współczesna sztuka dostarcza wielu przykładów zapożyczeń z bogactwa tradycji matematycznej. Elementy języka matematycznego, jego symbole pojawiają się w licznych dziełach sztuki wizualnej. Często artysta jest jedynie zafascynowany wartościami plastycznymi tych znaków. Jest też spora grupa artystów poszukująca w matematyce inspiracji na głębszym poziomie, dla których procesy matematyczne są źródłem czy natchnieniem w procesie twórczym. Odnaleziony algorytm służy obiektywizacji procesu twórczego. Przykładem mogą być czarno-białe obrazy Ryszarda Winiarskiego, w których regularną siatkę kwadratów artysta zamalowywał na biało lub czarno w zależności od wyniku rzutu monetą.

Jan Pamuła prawie od początku swojej drogi artystycznej wspomagał się algorytmami komputerowymi. W trakcie stypendium w paryskiej École Nationale Supérieure des Beaux-Arts wspólnie z informatykami przygotował program tworzący skomplikowane siatki prostokątów wypełniające prostokąt lub częściej kwadrat obrazu. Następnie przenosił tę siatkę na płótno i kolorował ręcznie prostokąty. Powstawały w ten sposób zadziwiające i przepiękne obrazy abstrakcyjne, kolorowe mapy pewnej rzeczywistości. W pierwszych pracach tego cyklu artysta ograniczał się do czterech kolorów, a obrazy te stawały się artystycznym komentarzem twierdzenia o kolorowaniu map, które właśnie w tych latach zostało udowodnione przy wspomaganiu komputerowym.

Jeszcze inną postawę w swojej twórczości reprezentuje Marian Warzecha. Od początku artystę interesował język, nie tylko znaki, lecz także składnia. Już we wczesnych pracach, kolażach, pojawiają się cytaty, litery, cyfry czy figury geometryczne. Początkowo ich układ jest „przypadkowy", lecz w kolejnych pracach wszystkie elementy są porządkowane. Z czasem kawałki starych rękopisów są zastępowane wzorami matematycznymi, które po kilku latach stają się dominującym znakiem. W niektórych obrazach towarzyszy im schematyczna postać mężczyzny czy też barwny ślad pędzla. Obrazy są wystawiane w zespołach zwanych metazbiorami, którym towarzyszy dokumentacja objaśniająca cel danej prezentacji. Zarówno te dzieła, bardzo surowe i ascetyczne, jak i dokumentacja nie są łatwe w odbiorze nawet dla ludzi zaznajomionych z teorią mnogości czy teorią kategorii. Dokumentacja pisana wspólnie z zawodowym matematykiem jest wzorowana na tekstach naukowych i zwraca uwagę na pewne paradoksy teorii. Te ascetyczne przedstawienia zmuszają do refleksji nad problemami podstawowych teorii matematycznych.

Intuicja i logika

Na zakończenie chciałbym przypomnieć pewne uwagi Henriego Poincaré na temat procesu twórczego. Uważał on, że logika i intuicja odgrywają istotną rolę w odkryciach matematycznych. Twierdził, że przez logikę dowodzimy, a przez intuicję wymyślamy i że logika pozostaje jałowa, jeśli nie zostanie zapłodniona przez intuicję. Intuicja nie była dla Poincaré czymś, czego używał, gdy nie mógł znaleźć logicznego dowodu. Uważał, że formalne argumenty mogą ujawnić błędy intuicji, a logiczny wywód jest jedynym środkiem potwierdzającym spostrzeżenia. Jednak wierzył, że sam dowód formalny nie może prowadzić do wiedzy.

Intuicja wydaje się narzędziem sztuki, a logika narzędziem nauki. Jednak prawdziwie wielkie dzieła, te, które powiększają naszą wiedzę o świecie, powstają wtedy, gdy logika wspomaga intuicję lub intuicja logikę. Matematyka i sztuka mogą się obejść bez siebie, ale prawdziwe arcydzieła powstają wtedy, kiedy jedna inspiruje drugą. ■